где V = 210 км/ч = 58,8 м/с — среднее значение скорости полета на расчетном участке по данным МСРП.

Для определения нормальной перегрузки n_y используем формулу (8) при условии $r_2 \approx r_y$:

$$\gamma = \frac{r_y}{r_z} \cdot \left(1 - \frac{1}{n_y}\right) \approx 1 - \frac{1}{n_y}.$$

Тогда перегрузка будет равна:

$$n_y \approx \frac{1}{1-\gamma} \approx \frac{1}{1-0{,}0731} \approx 1{,}08.$$

Результаты расчетов представлены в *табл. 3*.

Литература

1. Руководство по управлению безопасностью полетов (Doc 9859 ИКАО). 2009.
2. Тарасенков А. М., Брага В. Г., Тараненко В. Т. Динамика полета и боевого маневрирования летательных аппаратов. Ч. I. Траектории движения и летные характеристики / под ред. А. М. Тарасенкова. М.: ВВИА им. проф. Жуковского, 1973.
3. На пути к снижению аварийности при заходе и выполнении посадки. Оригинальная версия Airbus. Издание 1 октября 2000 г. / Русская версия. Аэрофлот. Издание 2 октября 2004 г.

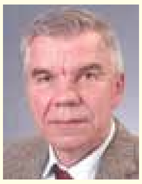
Таблица 3. **Значения управляющих функций**

x, м	V, км/ч	$V_{ср}$, км/ч	n_y			γ, град.		
			Измеренные (МСРП)	Расчетное значение	Погрешность	Измеренные (МСРП)	Расчетное значение	Погрешность
10 800	208		1,03			5,1		
10 330	210		1,15			5,3		
9870	205	210	1,1	1,08	3 %	3,4	4,2	4 %
8790	207		1,1			4,2		
7900	210		1			3,2		

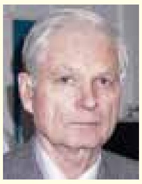
К проблеме устойчивости системы «экипаж — воздушное судно»

Система «экипаж — воздушное судно (ВС)» представляет собой сложную, динамическую систему с двумя основными элементами. При динамическом моделировании системы используются нелинейные уравнения движения ВС, законы отклонения рулей и изменения тяги двигателей, в которых действия экипажа (пилотов) задаются через коэффициенты управления. Ниже представлен упрощенный подход к исследованию устойчивости системы «экипаж — ВС». Уравнения устойчивости системы были получены путем линеаризации нелинейных уравнений движения ВС с заданным законом управления.

В. И. Арбузов,
доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой физики и химии СПбГУ ГА



Е. Ф. Жигалко,
доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика» Петербургского государственного университет путей сообщения (ПГУПС)



А. П. Ушаков,
доктор техн. наук, профессор, заведующий кафедрой диагностики технических систем СПбГУ ГА

В. Е. Чепига,
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры летной эксплуатации и профессионального обучения авиационного персонала СПбГУ ГА

В динамической модели системы «экипаж — ВС» элемент ВС — сложный объект, состоящий из большого числа твердых деформируемых тел, имеющий переменную массу и жидкое наполнение (топливо), заменяется на твердое тело постоянной (недеформируемой) конфигурации переменной или постоянной массы. Экипаж ВС, второй сложный элемент системы, моделируется коэффициентом управления.

Проблема изучения поведения системы «экипаж — ВС» с формальной точки зрения сводится к проблеме изучения свойств решений системы нелинейных и линеаризованных дифференциальных уравнений. При этом основное внимание уделяется исследованию устойчивости движения, оказывающей существенное влияние на исход полета, особенно на этапе посадки при движении ВС по глиссаде.

Движение ВС в общем случае описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений, а потому представляет известные сложности для исследований. Когда система нелинейна, то в зависимости от величины возмущения она может быть устойчивой или неустойчивой. Если система линейна и устойчива, то она устойчива при любом по величине возмущении. Линейная система хорошо описывает поведение нелинейной системы, когда начальные возмущения малы.

Для получения простых решений линейных дифференциальных уравнений возможны дальнейшие упрощения задачи, связанные с допущением постоянства коэффициентов уравнений на исследуемом интервале времени. Так как продолжительность переходных процессов невелика, можно пренебречь изменением кинематических характеристик невозмущенного движения (метод «замороженных» коэффициентов).

Линеаризованная система дифференциальных уравнений в общем виде состоит из шести уравнений движения и девяти кинематических уравнений, которые можно еще упростить, предполагая, что полет происходит без крена и скольжения. В первом приближении продольное и боковое возмущенное движение ВС можно рассматривать независимо друг от друга.

Будем предполагать, что параметры возмущенного движения отличаются от параметров невозмущенного движения на бесконечно малую величину (вариацию) (с индексом «0»):

$$V = V_0 + \Delta V;\ \vartheta = \vartheta_0 + \Delta\vartheta;\ = \Theta_0 + \Delta\Theta \text{ и т. д.},$$

где $\Delta V, \ldots$ — вариации параметров возмущенного движения.

Тогда можно считать, что произведения и квадраты отклонений параметров от невозмущенных значений пренебрежимо малы по сравнению с их первыми степенями, т. е. к динамической модели применим метод малых возмущений. Нелинейные уравнения движения **[1]**, записанные в «возмущениях», линеаризуются в окрестности невозмущенного движения.

Линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка, разрешенная относительно старших производных, приводится к нормальной системе n уравнений Коши, которые в векторной форме имеют вид:

$$\frac{d}{dt}X = AX, \qquad (1)$$

где $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\};\ A = \|a_{ij}\|;\ i, j = 1, 2, \ldots, n.$

Для продольного движения $n = 6$. Искомый вектор и матрица коэффициентов имеют следующие компоненты:

$$X = \{\Delta V, \Delta\Theta, \Delta\omega_z, \Delta\vartheta, \Delta y_g, \Delta x_g\};$$

$$a_{11} = -a_V + \bar{c}_V - \bar{c}_{\dot V} a_V + \bar{c}_{V_y} d_V;\ a_{12} = -a_0 + a_\alpha - \bar{c}_{\dot V} a_\Theta + \bar{c}_{\dot V} a_\alpha + \bar{c}_{V_y} d_\Theta;$$

$$a_{13} = 0;\ a_{14} = -a_\alpha - \bar{c}_{\dot V} a_\alpha;\ a_{15} = 0;\ a_{16} = 0;$$

$$a_{21} = b_V + c_V^* - c_{\dot V}^* a_V + c_{V_y}^* d_V;\ a_{22} = b_\Theta - b_\alpha - c_{\dot V}^* a_\Theta + c_{\dot V}^* a_\alpha + c_{V_y}^* d_\Theta;$$

$$a_{23} = 0;\ a_{24} = b_\alpha - c_{\dot V}^* a_\alpha;\ a_{25} = 0;\ a_{26} = 0;$$

$$a_{31} = \bar{k}_{V_y} d_V;\ a_{32} = q_\alpha + \bar{k}_{V_y} d_\Theta;\ a_{33} = -q_{\dot\vartheta} - q_{\dot\alpha} - \bar{k}_{\omega_z};$$

$$a_{34} = -q_\alpha - \bar{k}_\vartheta;\ a_{35} = \bar{k}_h;\ a_{36} = 0;$$

$$a_{41} = 0;\ a_{42} = 0;\ a_{43} = 1;\ a_{44} = 0;\ a_{45} = 0;\ a_{46} = 0;$$

$$a_{51} = d_V;\ a_{52} = d_\Theta;\ a_{53} = 0;\ a_{54} = 0;\ a_{55} = 0;\ a_{56} = 0;$$

$$a_{61} = l_V;\ a_{62} = l_\Theta;\ a_{63} = 0;\ a_{64} = 0;\ a_{65} = 0;\ a_{66} = 0,$$

где $a_0 = g\cos\Theta_0;\ a_\alpha = \dfrac{V_0}{\tau}\left(c_x^\alpha - c_{y_0} + \dfrac{2G\cos\Theta_0}{S\rho_0 V_0^2}\right);$

$$a_V = \frac{\rho_0 S V_0}{m}\left(c_{x_0} - \frac{P^V\cos\alpha_0}{S\rho_0 V_0}\right);\ a_\delta = \frac{P^\delta}{m}\cos\alpha_0;\ b_\Theta = \frac{g\sin\Theta_0}{V_0};$$

$$b_\alpha = \frac{\rho_0 S V_0}{m}\left(c_y^\alpha + c_{x_0} + \frac{2G\sin\Theta_0}{S\rho_0 V_0^2}\right);\ b_V = \frac{\rho_0 S}{m}\left(c_{y_0} + \frac{P^V\sin\alpha_0}{S\rho_0 V_0}\right);$$

$$b_\delta = \frac{P^\delta\sin\alpha_0}{mV_0};\ q_{\dot\vartheta} = -\frac{m_z^{\omega_z}}{I_z} b_A S\frac{\rho_0 V_0^2}{2};\ q_{\dot\alpha} = -\frac{m_z^{\dot\alpha}}{I_z} b_A S\frac{\rho_0 V_0^2}{2};$$

$$q_\alpha = \frac{m_z^\alpha \mu}{\tau^2 r_z^{-2}};\ q_\delta = \frac{m_z^\delta \mu_{\Pi}}{\tau^2 r_z^{-2}};\ r_z^{-2} = \frac{r_z^2}{b_A^2} = \frac{I_z}{b_A^2 m};\ \tau = \frac{2m}{\rho_0 S V_0};\ \mu = \frac{2m}{\rho_0 S b_A}.$$

$$c_\bullet = \frac{a_\delta c_\bullet}{k_{\text{дв}}},\ c_\bullet^* = \frac{b_\delta c_\bullet}{k_{\text{дв}}},\ k_\bullet = K_\bullet q_\delta.$$

Для неуправляемого ВС

$$\bar{k}_h = \bar{k}_\vartheta = \bar{k}_{V_y} = \bar{k}_{\omega_z} = c_V^* = c_{\dot V}^* = c_{V_y}^* = \bar{c}_V = \bar{c}_{\dot V} = \bar{c}_{V_y} = 0.$$

В формулах использованы следующие обозначения:

$k_\bullet$, $c_\bullet$ — коэффициенты управления по соответствующему параметру;

m — масса самолета;

I_z — момент инерции самолета относительно поперечной оси;

b_A — средняя аэродинамическая хорда;

V — скорость самолета;

ω_z — угловая скорость самолета относительно поперечной оси;

m_z — коэффициент момента тангажа;

ϑ — угол тангажа;

Θ — угол наклона траектории;

α — угол атаки;

c_x — коэффициент лобового сопротивления;

c_y — коэффициент подъемной силы;

S — площадь крыла;

P — тяга двигателя;

ρ — плотность воздуха;

δ — угол отклонения руля высоты.

Верхний индекс в выражениях c_x^α, c_y^α, $m_z^{\omega_z}$, P^V, P^δ означает производную по соответствующему параметру (например: $c_x^\alpha = \dfrac{\partial c_x}{\partial\alpha}$; $c_x^\alpha = \dfrac{\partial c_x}{\partial\alpha}$; $m_z^{\omega_z} = \dfrac{\partial m_z}{\partial\omega_z}$; $P^V = \dfrac{\partial P}{\partial V}$ и т. д.), нижний индекс «0» соответствует невозмущенному движению; «g» — обозначает земную систему координат.

Основное уравнение управления имеет вид **[1]**:

$$\delta = -K_h\Delta h + K_{V_y}\Delta V_y - K_{\omega_z}\Delta\omega_z - K_\theta\Delta\theta,$$

где K_h, K_{V_y}, K_{ω_z}, K_θ — коэффициенты управления.

$$\Delta h = H - H_з;\ \Delta V_y = V_y - V_{y_з};\ \Delta\theta = \theta - \theta_з.$$

Общий закон управления тягой двигателей преобразуется к виду:

$$P = P_0 - \Delta P;$$

$$\Delta P = C_V\Delta V + C_{\dot V}\dot V + C_{V_y}\Delta V_y;$$

$$\Delta V = V - V_з,$$

где C — коэффициенты управления тягой.

Выведенная система однородных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (1), описывающая управляемое продольное движение ВС, имеет шестой порядок. При анализе устойчивого движения ВС можно заметить, что устойчивость не зависит от координаты X_g (шестое уравнение) и пренебрежимо мало зависит от координаты Y_g (пятое уравнение). Тогда для исследования устойчивости системы «экипаж — ВС» можно использовать замкнутую систему уравнений четвертого порядка (четыре первых уравнения системы (1)).

Задавая решение обыкновенных линейных уравнений с постоянными коэффициентами (1) в известном виде, получим характеристическое уравнение системы в форме:

$$A(p) = p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4, \qquad (2)$$

где коэффициенты a_1, a_2, a_3, a_4 выражаются через компоненты матрицы (1).

В случае неуправляемого движения коэффициенты уравнения (2) с точностью до обозначений и малых величин совпадают с известными выражениями **[1]:**

$$a_1 = a_V + b_\alpha - b_\Theta + q_{\dot\vartheta} + q_{\dot\alpha};$$

$$a_2 = a_V(b_\alpha - b_\Theta) - b_V(a_\alpha - a_\Theta) + b_\alpha q_{\dot\vartheta} + q_\alpha + (q_{\dot\vartheta} + q_{\dot\alpha})(a_V - b_\Theta);$$

$$a_3 = q_\alpha(a_V - b_\Theta) + q_{\dot\vartheta}(a_V b_\alpha - a_\alpha b_V) + (q_{\dot\vartheta} + q_{\dot\alpha})(a_\Theta b_V - a_V b_\Theta);$$

$$a_4 = q_\alpha(a_\Theta b_V - a_V b_\Theta).$$

Условие устойчивости соответствует неравенствам:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4 > 0;\ a_3(a_1 a_2 - a_3) - a_4 a_1^2 > 0.$$

Реальное движение ВС, которому соответствует характеристическое уравнение (2), может быть представлено в виде суммы более простых движений, каждому из которых приводится в соответствие характеристическое уравнение второго порядка. Эти два вида движения имеют существенно различные частоты собственных колебаний и коэффициенты затухания. Большие корни характеристического уравнения (высокие частоты) отвечают короткопериодическому движению, малые корни (низкие частоты) соответствуют длиннопериодическому движению ВС. Разделение движения ВС на два вида обосновано физически. Изменение угла атаки α практически полностью протекает в короткопериодическом движении, в то время как скорость полета V можно считать неизменной в короткопериодической фазе движения; угол наклона траектории движения ВС Θ в основном изменяется в длиннопериодическом движении. Разделение движения ВС на две простые фазы невозможно, когда ВС обладает недостаточной степенью продольной статической устойчивости (неустойчивостью в фазе короткопериодического движения). Большинство самолетов обладают достаточной устойчивостью (соответствуют нормам летной годности) в отношении короткопериодического движения. Таким образом, интерес представляет исследование длиннопериодического движения.

Упрощенно можно считать, что длиннопериодическое движение начинается после окончания короткопериодического движения. Короткопериодическое движение вызвано нарушением равновесия сил, которыми пренебрегают в первый момент при определении характеристик короткопериодического движения.

Для длиннопериодического движения ($\Delta\alpha$~0):

$$A(P)_{\text{д}} = p^2 + a_1 p + a_2;$$

$$a_1 = a_V b_\Theta; \quad a_2 = a_\Theta b_V - a_V b_\Theta;$$

$$a_V = \frac{\rho_0 S V_0}{m}\left(c_{x_0} - \frac{P^V \cos\alpha_0}{S\rho_0 V_0}\right); \quad a_\Theta = g\cos\Theta_0; \qquad (3)$$

$$b_\Theta = \frac{g\sin\Theta_0}{V_0}; \quad b_V = \frac{\rho_0 S}{m}\left(c_{y_0} + \frac{P^V \sin\alpha_0}{S\rho_0 V_0}\right).$$

Условия устойчивости Гурвица $a_1 > 0$; $a_2 > 0$. Отсюда следует, что устойчивость существенно зависит от производной P^V и коэффициентов c_{x_0}, а период колебаний еще и от c_{y_0}, так как эти коэффициенты определяют значения проекций сил, нарушение равновесия которых вызывает длиннопериодические колебания.

Для пологих траекторий снижения коэффициент b_Θ достаточно мал, однако при больших значениях угла Θ коэффициент b_Θ играет существенную роль в колебательном процессе.

Анализируя коэффициенты (3), можно сделать вывод, что затухание колебаний (коэффициент демпфирования $h = \frac{1}{2}a_1$) зависит от конструктивных и динамических (кинематических) характеристик ВС, которые необходимо принимать в расчет в процессе летной эксплуатации:

$$h = h\left(\frac{mg}{S},\ c_x,\ P^V = \frac{\partial P}{\partial V},\ \Theta\right).$$

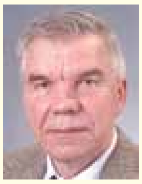
Если параметры $\frac{mg}{S}$ (нагрузка на крыло), c_x (конфигурация ВС) определены в данном полете, то на характеристики P^V и Θ экипаж может влиять (на модели влияние осуществляется через выбор коэффициентов управления K).

Литература

1 Коваленко Г. В., Микинелов А. Л., Чепига В. Е. Летная эксплуатация. М.: Машиностроение, 2007. 416 с.

Летная эксплуатация воздушного судна для критических режимов, описываемых волновым уравнением

При летной эксплуатации самолетов в условиях, приближающихся к волновому кризису, должны учитываться эффекты, описываемые волновым уравнением в окрестности точки сингулярности. Для этого предлагается использовать гиперболическую систему координат. В новых переменных волновое уравнение принимает вид уравнения Лапласа в полярных координатах. Получено его решение, отличающееся от интеграла Пуассона. С его помощью появляется возможность более точно рассчитывать параметры обтекания самолета и его эксплуатационные характеристики.



Е. Ф. Жигалко,
доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика», Петербургского государственного университет путей сообщения (ПГУПС)

В. Е. Каленов,
аспирант кафедры летной эксплуатации и профессионального обучения авиационного персонала СПбГУ ГА

Ю. Е. Хорошавцев,
доктор техн. наук, профессор кафедры систем автоматизированного управления СПбГУ ГА

Для эксплуатации воздушных судов необходимо ясное понимание физических процессов, происходящих в критических условиях полета. Обычно эти условия возникают, когда самолет выходит за диапазон допустимых скоростей, причем поскольку в пилотировании используются две