Реальное движение ВС, которому соответствует характеристическое уравнение (2), может быть представлено в виде суммы более простых движений, каждому из которых приводится в соответствие характеристическое уравнение второго порядка. Эти два вида движения имеют существенно различные частоты собственных колебаний и коэффициенты затухания. Большие корни характеристического уравнения (высокие частоты) отвечают короткопериодическому движению, малые корни (низкие частоты) соответствуют длиннопериодическому движению ВС. Разделение движения ВС на два вида обосновано физически. Изменение угла атаки α практически полностью протекает в короткопериодическом движении, в то время как скорость полета V можно считать неизменной в короткопериодической фазе движения; угол наклона траектории движения ВС Θ в основном изменяется в длиннопериодическом движении. Разделение движения ВС на две простые фазы невозможно, когда ВС обладает недостаточной степенью продольной статической устойчивости (неустойчивостью в фазе короткопериодического движения). Большинство самолетов обладают достаточной устойчивостью (соответствуют нормам летной годности) в отношении короткопериодического движения. Таким образом, интерес представляет исследование длиннопериодического движения.

Упрощенно можно считать, что длиннопериодическое движение начинается после окончания короткопериодического движения. Короткопериодическое движение вызвано нарушением равновесия сил, которыми пренебрегают в первый момент при определении характеристик короткопериодического движения.

Для длиннопериодического движения ($\Delta\alpha$~0):

$$A(P)_{д} = p^2 + a_1 p + a_2;$$

$$a_1 = a_V b_\Theta;\quad a_2 = a_\Theta b_V - a_V b_\Theta;$$

$$a_V = \frac{\rho_0 S V_0}{m}\left(c_{x_0} - \frac{P^V \cos\alpha_0}{S\rho_0 V_0}\right);\quad a_\Theta = g\cos\Theta_0; \qquad (3)$$

$$b_\Theta = \frac{g\sin\Theta_0}{V_0};\quad b_V = \frac{\rho_0 S}{m}\left(c_{y_0} + \frac{P^V \sin\alpha_0}{S\rho_0 V_0}\right).$$

Условия устойчивости Гурвица $a_1 > 0$; $a_2 > 0$. Отсюда следует, что устойчивость существенно зависит от производной P^V и коэффициентов c_{x_0}, а период колебаний еще и от c_{y_0}, так как эти коэффициенты определяют значения проекций сил, нарушение равновесия которых вызывает длиннопериодические колебания.

Для пологих траекторий снижения коэффициент b_Θ достаточно мал, однако при больших значениях угла Θ коэффициент b_Θ играет существенную роль в колебательном процессе.

Анализируя коэффициенты (3), можно сделать вывод, что затухание колебаний (коэффициент демпфирования $h = \frac{1}{2}a_1$) зависит от конструктивных и динамических (кинематических) характеристик ВС, которые необходимо принимать в расчет в процессе летной эксплуатации:

$$h = h\left(\frac{mg}{S},\ c_x,\ P^V = \frac{\partial P}{\partial V},\ \Theta\right).$$

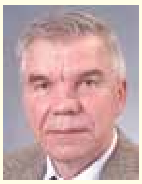
Если параметры $\frac{mg}{S}$ (нагрузка на крыло), c_x (конфигурация ВС) определены в данном полете, то на характеристики P^V и Θ экипаж может влиять (на модели влияние осуществляется через выбор коэффициентов управления K).

Литература

1 Коваленко Г. В., Микинелов А. Л., Чепига В. Е. Летная эксплуатация. М.: Машиностроение, 2007. 416 с.

Летная эксплуатация воздушного судна для критических режимов, описываемых волновым уравнением

При летной эксплуатации самолетов в условиях, приближающихся к волновому кризису, должны учитываться эффекты, описываемые волновым уравнением в окрестности точки сингулярности. Для этого предлагается использовать гиперболическую систему координат. В новых переменных волновое уравнение принимает вид уравнения Лапласа в полярных координатах. Получено его решение, отличающееся от интеграла Пуассона. С его помощью появляется возможность более точно рассчитывать параметры обтекания самолета и его эксплуатационные характеристики.



Е. Ф. Жигалко,
доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика», Петербургского государственного университет путей сообщения (ПГУПС)

В. Е. Каленов,
аспирант кафедры летной эксплуатации и профессионального обучения авиационного персонала СПбГУ ГА

Ю. Е. Хорошавцев,
доктор техн. наук, профессор кафедры систем автоматизированного управления СПбГУ ГА

Для эксплуатации воздушных судов необходимо ясное понимание физических процессов, происходящих в критических условиях полета. Обычно эти условия возникают, когда самолет выходит за диапазон допустимых скоростей, причем поскольку в пилотировании используются две скорости — воздушная и индикаторная, то и диапазонов два, каждый из которых определяется на основании своих физических условий. Для этих диапазонов характерно относительно плавное, без сжатия, обтекание потоком воздуха, соответственно рассчитываются параметры устойчивости и управляемости самолета. Но при скоростях, приближающихся к скорости звука, возникает волновой кризис, характер обтекания, в первую очередь несущих поверхностей, существенно меняется, становится нестационарным со скачками уплотнений, а поведение самолета оказывается труднопредсказуемым **[1]**. Для таких режимов построение математических моделей становится непростой задачей.

Ниже предложен принципиально новый подход к описанию волнового кризиса, основанного на использовании волнового уравнения. Поскольку кризис возникает при околозвуковых скоростях, используется модель волны, записываемая в гиперболических координатах **[3]**. Для нее получено решение, предсказывающее возникновение в точке сингулярности зоны сжатия, которая на практике проявляется в виде скачков уплотнения среды и ударной волны.

Известные решения волнового уравнения получены применительно к классическим физическим процессам, имеющим волновую природу, и лежат в области вещественных чисел. Такое предположение является вполне обоснованным, однако математически не исчерпывает всех возможностей. С другой стороны, не ко всем волнам применима существующая теория. Мы сделали попытку найти новые решения, расширив область поиска, включающую комплексные переменные.

Пусть имеется однородное волновое уравнение относительно u

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0. \tag{1}$$

Перейдем к новым криволинейным координатам r и ϕ, которые будем называть гиперболическими:

$$r=\sqrt{\left|c^2t^2-x^2\right|},\ \ r\geq 0, \tag{2}$$

$$\phi=i\,\mathrm{arth}\frac{x}{ct},\ \ i=\sqrt{-1}\ . \tag{3}$$

Переходя от старых x и t переменных к новым r и ϕ, получаем функцию $u\,(r,\phi)$.

После ряда выкладок в конечном итоге волновое уравнение относительно искомой функции $u\,(r,\phi)$ может быть переписано как

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0. \tag{4}$$

Оно совпадает с уравнением Лапласа в полярных координатах. На первый взгляд может показаться, что в этом случае все решения уравнения Лапласа формально могут быть распространены на волновое уравнение. Однако для этого еще необходимо, чтобы граничные условия, во многом определяющие решение задачи, были одинаковыми. В противном случае формально полученное решение будет лишено смысла. Как нетрудно заметить, граничные условия (не только в задаче Дирихле) уравнения Лапласа не могут быть физически корректно интерпретированы в волновом уравнении. Необходима их модификация.

То, что при переходе к гиперболическим координатам получилось уравнение Лапласа в полярных координатах, конечно, неслучайно и объясняется фундаментальной связью тригонометрических и гиперболических функций в области комплексных чисел.

Вместо условия задачи Дирихле на окружности радиуса r мы запишем ограничение в виде

$$u\Big|_{\phi=\phi_0}=f(r). \tag{5}$$

Оно задает вид волновой функции в зависимости от фазы при наблюдении волны из инерциальной системы координат, двигающейся со скоростью $v_0 = x_0/t_0$, такой, что $\phi_0 = i\,\mathrm{arth}\,v_0/c$.

Условия задачи таковы: в лабораторной системе координат покоится источник колебаний, создающий волну. Движущийся наблюдатель в каждый j-момент оказывается в точке $x_{0j} = v_0t_{0j}$ и регистрирует амплитуду волны f_j. Полученная таким образом функция $u\Big|_{\phi_0}=f(r)=f\left(ct_0\sqrt{1-v_0^{\,2}/c^2}\right)$ задает граничное условие задачи. Здесь индекс $_0$ при x и t означает не конкретное значение, а множество, на котором определяется $f(r)$.

Если $\phi_0 = 0$, что соответствует $v_0 = 0$, то наблюдение ведется из лабораторной системы координат и наблюдаются колебания излучателя $f\,(ct_0)$.

Кроме того, из определения гиперболического тангенса следует, что $|\mathrm{th}\phi| < 1$, а это, согласно (3), соответствует $v < c$.

Координате r можно придать следующий смысл: если принять, что $c = \omega/k$, где ω — частота колебаний, а k — волновое число, то

$$r=\frac{1}{k}\sqrt{\left|(\omega t+kx)(\omega t-kx)\right|}. \tag{6}$$

То есть r равно среднему геометрическому фаз прямой и обратной волн в масштабе k.

Таким образом, чтобы решение уравнения (4) описывало волну, оно должно быть периодической функцией от r. В соответствии со сказанным граничное условие принимает вид (5).

Далее решение уравнения (4) производится методом разделения переменных Фурье **[2]**:

$$u=\Phi(\phi)L(r). \tag{7}$$

Подставляя это выражение в (4), приходим к

$$\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)}=-\frac{r^2L''(r)+rL'(r)}{L(r)}=\lambda^2,\ \ \lambda\geq 0. \tag{8}$$

Необходимость положительного знака перед λ будет видна в дальнейшем: она вытекает из требования периодичности решения по r.

Условие (8) распадается на два уравнения:

$$\Phi''(\phi)-\lambda^2\,\Phi(\phi)=0, \tag{9}$$

$$r^2\,L''(r)+r\,L'(r)+\lambda^2\,L(r)=0. \tag{10}$$

Решая (9), находим

$$\Phi=P\,e^{\lambda\phi}+Q\,e^{-\lambda\phi}. \tag{11}$$

Решение уравнения (10) ищется в виде функции $L = r^m$, после подстановки которой в (10) получаем $m=\pm i\lambda$ и

$$L=r^{\pm i\lambda}=e^{\pm i\lambda\ln r},$$

$$L=A\cos(\lambda\ln r)+B\sin(\lambda\ln r). \tag{12}$$

Подставляя (11) и (12) в (7), находим частное решение:

$$u_\lambda=\left[A\cos(\lambda\ln r)+B\sin(\lambda\ln r)\right]\left(P\,e^{\lambda\phi}+Q\,e^{-\lambda\phi}\right).$$

Далее произвольно полагаем $P = 0$, ограничиваясь $\phi \geqslant 0$, где знак перед ϕ определяет направление движения по отношению к лабораторной, неподвижной системе координат:

$$u_\lambda=\left[A_\lambda\cos(\lambda\ln r)+B_\lambda\sin(\lambda\ln r)\right]e^{-\lambda\phi}.$$

Здесь A, B, P, Q, $A_\lambda = AQ$, $B_\lambda = BQ$ — постоянные интегрирования.

Поскольку λ — непрерывная величина, общим решением будет

$$u=\int_0^\infty e^{-\lambda\phi}\left[A_\lambda\cos(\lambda\ln r)+B_\lambda\sin(\lambda\ln r)\right]d\lambda. \tag{13}$$

Воспользуемся краевым условием (5):

$$f(r)=\int_0^\infty e^{-\lambda\phi_0}\left[A_\lambda\cos(\lambda\ln r)+B_\lambda\sin(\lambda\ln r)\right]d\lambda.$$

Перейдем к новой переменной $\alpha = \ln r$ и, используя тождество $r = \exp(\ln r)$, представим граничное условие $f(r)$ в виде функции

$f_\alpha(\ln r) \equiv f(\alpha)$. Очевидно, что $-\infty < \alpha < \infty$. Пусть полученная таким образом $f(\alpha)$ может быть представлена интегралом Фурье. Тогда

$$A_\lambda=\frac{e^{\lambda\phi_0}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha)\cos(\lambda\alpha)\,d\alpha,$$

$$B_\lambda=\frac{e^{\lambda\phi_0}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha)\sin(\lambda\alpha)\,d\alpha.$$

Подставляя найденные A_λ, B_λ в (13) и следуя обычной схеме преобразований, получаем

$$u=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda(\phi-\phi_0)}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha)\cos\left[\lambda(\alpha-\ln r)\right]d\alpha\right\}d\lambda.$$

Меняя порядок интегрирования, имеем

$$u=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{f(\alpha)\left(\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda(\phi-\phi_0)}\cos\left[\lambda(\alpha-\ln r\right]d\lambda\right)\right\}d\alpha. \qquad (14)$$

Интеграл в круглых скобках табличный со значением

$$e^{-\lambda(\phi-\phi_0)}\frac{(\phi_0-\phi)\cos\lambda(\alpha-\ln r)+(\alpha-\ln r)\sin\lambda(\alpha-\ln r)}{(\phi-\phi_0)^2+(\alpha-\ln r)^2}\Bigg|_0^{\infty}=$$
$$=\frac{\phi-\phi_0}{(\phi-\phi_0)^2+(\alpha-\ln r)^2}. \qquad (15)$$

Подставляя (15) в (14) в конечном итоге получаем

$$u(r,\phi)=\frac{\phi-\phi_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\alpha)\,d\alpha}{(\phi-\phi_0)^2+(\alpha-\ln r)^2}. \qquad (16)$$

Найденный интеграл является искомым решением волнового уравнения в гиперболических координатах.

Проанализируем его следствия. Прежде всего, рассмотрим случай $r = 1$, т. е. $\exp(\ln 1) = 1$ или $f(\alpha) = 1$. Физически мы имеем постоянную фазу волны. Очевидно, что все точки волны, имеющие одинаковую фазу, должны иметь одинаковую амплитуду, поскольку уравнение (1) не предусматривает рассеяние энергии. Действительно, подставляя в (16) значение $f(\alpha) = 1$, получаем табличный интеграл

$$u=\frac{\phi-\phi_0}{\pi}\frac{1}{\phi-\phi_0}\operatorname{arctg}\frac{\alpha-\ln r}{\phi-\phi_0}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=1.$$

Несомненный интерес представляет колебательное граничное условие. Пусть

$$f(r)=e^{in\ln r},\ \ n>0.\ \ f(\alpha)=e^{in\alpha},$$

$$u=\frac{\phi-\phi_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{in\ln r}e^{in(\alpha-\ln r)}}{(\phi-\phi_0)^2+(\alpha-\ln r)^2}d\alpha=$$
$$=\frac{\phi-\phi_0}{\pi}e^{in\ln r}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos n(\alpha-\ln r)\,d\alpha}{(\phi-\phi_0)^2+(\alpha-\ln r)^2}+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin n(\alpha-\ln r)\,d\alpha}{(\phi-\phi_0)^2+(\alpha-\ln r)^2}\right].$$

Второй интеграл в силу нечетности подынтегральной функции обращается в ноль, а первый — табличный. В результате

$$u=e^{n(\phi_0-\phi)}\,e^{in\ln r}. \qquad (17)$$

Совершенно аналогично для $f(\alpha) = \exp(-in\alpha)$ получаем

$$u=e^{n(\phi_0-\phi)}\,e^{-in\ln r}. \qquad (18)$$

Уравнение Лапласа линейное, поэтому суперпозиция решений (17) и (18) приводит к

$$f(\alpha)=\frac{e^{in\alpha}+e^{-in\alpha}}{2}=\cos n\alpha,$$
$$u=e^{n(\phi_0-\phi)}\cos(n\ln r). \qquad (19)$$

Если $\phi = \phi_0$, эта функция удовлетворяет граничному условию. Непосредственной подстановкой в (4) легко убедиться, что она удовлетворяет и волновому уравнению.

Решение (19) имеет особую точку $r = 0$, в ней $\ln r \to -\infty$. Это имеет место, когда $x/t = c$, или $v = x/t = c$. Какой это имеет физический смысл? При $r \to 0$ функция $\cos(\ln r)$ описывает колебания все большей частоты так, что в пределе частотный спектр колебаний приближается к δ — функции Дирака, т. е. вся энергия волны сосредотачивается в точке сингулярности с координатой $x = ct$. Для звуковых волн, когда c — скорость звука, мы имеем ударную волну, несущую разрушительную энергию.

Полученное решение позволяет с новых физических позиций исследовать поведение воздушных судов на больших скоростях и обоснованно регламентировать правила их летной эксплуатации, а также организовывать управление воздушным движением. Т

Литература

1. Аэродинамические особенности и критические режимы полета на изделии 2М / Под. ред. В. И. Андреева. М.: Минобороны, 1981.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., Наука, 1977.
3. Хорошавцев Ю. Е. Волновое уравнение в гиперболических координатах. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ // Межвуз. темат. сб. тр. Вып. 9. СПб.: СПбГАСУ, 2003. С. 137–148.