

# Пространственная модель переходных режимов движения поезда



**О. М. Маркова,**  
канд. техн. наук,  
старший научный  
сотрудник, ученый  
секретарь Института  
технической механики НАН  
Украины и ГКА Украины  
(ИТМ НАНУ и ГКАУ)



**Е. Н. Ковтун,**  
канд. техн. наук,  
старший научный  
сотрудник ИТМ НАНУ  
и ГКАУ



**В. В. Малый,**  
научный сотрудник  
ИТМ НАНУ и ГКАУ

Рассмотрена возможность сочетания двух расчетных моделей движения поезда: модели, где учтены только продольные перемещения тел, и пространственной модели. На основании комбинированной математической модели движения грузового поезда разработана компьютерная программа, в которой часть экипажей в составе поезда представляется упрощенными расчетными схемами, а отдельные вагоны – достаточно подробно с учетом специфики конструкции и особенностей транспортируемого груза.

Для исследования динамики подвижного состава при переходных режимах движения обычно используется математическая модель движения поезда, в которой его отдельные вагоны представляются цепочкой одномерных (учитываются только продольные перемещения) или двумерных (учитываются продольные и вертикальные перемещения) твердых тел, соединенных существенно нелинейными деформируемыми элементами. Эта достаточно простая модель может быть с успехом использована при изучении вопросов формирования состава поезда, проектировании тормозной системы и исследовании работы межвагонных соединений, но с ее помощью нельзя оценить те динамические процессы, которые характерны в этих режимах для отдельных вагонов поезда.

Пространственная модель движения поезда по пути произвольного очертания, в которой все вагоны представлены достаточно полными пространственными системами, дает возможность учитывать силы взаимодействия между всеми телами системы, силы, возникающие при движении по криволинейным участкам пути, составляющие сил, действующих между вагонами, а также оценить устойчивость и безопасность движения поезда. Отметим, однако, что число степеней свободы такой математической модели очень велико, что затрудняет анализ влияния различных факторов на динамические качества отдельных экипажей.

В настоящей работе рассматривается возможность сочетания двух расчетных моделей движения поезда: модели, где учтены только продольные перемещения тел, и пространственной модели.

Колебания отдельных вагонов поезда моделируются двумя способами.

Для части вагонов использована модель, описывающая движение экипажей в продольной плоскости. В этом случае полагают, что все перемещения кузова вагона и тележек одинаковы, и вагон упрощенно представляют в виде одного абсолютно твердого тела, которое может перемещаться в продольном направлении. Расчетная схема поезда, состоящего из таких вагонов, представлена одномерной цепочкой твердых тел, соединенных нелинейными деформируемыми элементами [1]. На  $k$ -е твердое тело действуют силы  $S_k$  и  $S_{k+1}$ , зависящие от силовых характеристик межвагонных соединений, и внешние силы  $F_k^*$ , зависящие от режима движения поезда. Движение поезда в этом случае описывается системой уравнений вида

$$m_k \ddot{x}_k = S_k - S_{k+1} + F_k^* \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

где  $\ddot{x}_k$  – продольное перемещение  $k$ -го вагона;  $m_k$  – масса  $k$ -го вагона;  $N$  – количество вагонов, расчетная схема которых представлена одной массой.

Для другой части вагонов использованы математические модели, описывающие их пространственные колебания. Расчетная схема каждого вагона представляется в виде разветвленной пространственной системы из  $L$  твердых тел, соединенных линейными и нелинейными связями с различной релогией [2, 3]. При определении числа степеней свободы рассматриваемой механической системы принимаются во внимание ограничения, наложенные на перемещения твердых тел в силу общепринятых допущений и конструктивных особенностей ходовых частей вагона.

Движение этих вагонов моделируется с учетом действия внешних возмущений, связанных с несовершенством рельсовой колеи. Путь моделируется приведенной к каждому колесу массой, которая опирается в вертикальном и горизонтальном поперечном направлениях на пружины и демпферы вязкого трения, имитирующие упруго-диссипативные свойства рельсов и подрельсового основания. Система «вагон–рельсовая колея» с учетом наложенных на нее связей имеет  $n$  степеней свободы.

Чтобы иметь возможность исследовать движение поезда при переходных режимах, необходимо для каждого вагона ввести дополнительную степень свободы, соответствующую его абсолютному перемещению вдоль оси пути –  $s_i$ . Тогда число степеней свободы для вагона станет равным  $n^* = n + 1$ .

При описании движения вагона по участкам пути произвольного очертания выбирается неподвижная система координат, а для каждого твердого тела – по две подвижные системы координат: естественная и связанная с твердым телом [3].

Дифференциальные уравнения движения каждого отдельного вагона составляются в форме уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} = Q_i^* + F_i^* \quad (2)$$

$(i = \overline{1, n^*})$ ,

где  $q_i, \dot{q}_i$  – обобщенные координаты и их скорости;  $T$  – кинетическая энергия;  $\Pi$  – потенциальная энергия;  $\Phi$  – функция рассеяния;  $Q_i^*$  – обобщенные силы, не имеющие потенциала;  $F_i^*$  – приложенные внешние силы.

Кинетическая энергия системы определяется как сумма кинетических энергий твердых тел, входящих в систему

$$T = \sum_{j=1}^L T_j + T_{\Pi}, \quad (3)$$

где  $T_j$  – кинетическая энергия  $j$ -го твердого тела ( $j = \overline{1, L}$ );  $T_{\Pi}$  – кинетическая энергия пути.

Кинетическая энергия  $j$ -го твердого тела вычисляется по теореме Кенига и равна сумме двух составляющих: кинетической энергии поступательного движения, которое определяется движением центра масс, и кинетической энергии сферического движения относительно центра масс. При этом учитывается переменность скорости движения, кривизны пути и возвышения наружного рельса в криволинейных участках пути.

Потенциальная энергия системы  $\Pi$  определяется как сумма энергии упругих деформаций  $\Pi_1$  и изменений энергии  $\Pi_2$  вследствие подъема или опускания центров масс тел, входящих в систему

$$\Pi = \Pi_1 + \sum_{j=1}^L \Pi_{2j}. \quad (4)$$

Потенциальная энергия  $\Pi_1$  вычисляется по теореме Клапейрона как сумма энергий, накапливаемых в упругих элементах системы при их деформациях.

Функция рассеяния  $\Phi$  учитывает действие сил вязкого трения при вертикальных и горизонтальных прогибах пути. В зависимости от конструкции вагона при построении математической модели учитывается действие сил вязкого и (или) сухого трения при работе упругих элементов в системах подвешивания ходовых частей, а также в узлах соединения кузова вагона с тележками.

Обобщенные силы  $Q_i^*$ , приложенные к системе, представляют собой сумму сил, возникающих в результате взаимодействия колес с рельсами  $Q_{i\tau}$  и сил  $S_{i\tau}$ , действующих в межвагонных соединениях сцепа вагонов при его движении.

Обобщенные силы  $Q_i^*$ , не имеющие потенциала, включают в себя силы взаимодействия колес и рельсов, которые определяются с использованием гипотезы крипа. Согласно этой гипотезе касательные силы взаимодействия колес с рельсами нелинейно зависят от безразмерных характеристик проскальзывания. Последние определяются в предположении, что профиль поверхности катания колеса криволинейный. Характер и величина сил, действующих в контакте колеса и рельса, определяются по методике, описанной в работе [4]. Обобщенные силы  $Q_i^*$  определяются как коэффициенты при вариациях обобщенных координат в выражениях возможных работ сил псевдоскольжения. При определении сил, действующих на колеса в горизонтальном поперечном направлении, принимаются во внимание (помимо сил псевдоскольжения) составляющие от действия силы тяжести.

Как указано раньше, к обобщенным силам  $Q_i^*$  относятся также и силы, возникающие в сцепных устройствах, которыми соединены между собой вагоны поезда (силы в межвагонном соединении).

Например, для поезда, состоящего из грузовых вагонов, зависимость силы  $S_{k,k+1}$ , действующей между  $k$ -м и  $(k+1)$ -м вагонами, от взаимного смещения и значений скорости смещения концов

соответствующих автосцепок в продольном направлении описывается уравнениями, приведенными в работе [1]:

$$S_{k,k+1}(q, \dot{q}) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < |q| \leq \delta; \\ \text{при } \delta < |q| < \Delta + \delta \text{ и } q\dot{q} \geq 0: \\ k_n(q - \delta), & \text{если } |k_n(q - \delta)| \leq \\ & \leq |k_k(q - q_p) + k_p(q_p - \delta)|; \\ k_k(q - q_p) + k_p(q_p - \delta) + \beta\dot{q}, & \text{если } |k_n(q - \delta)| > \\ & > |k_k(q - q_p) + k_p(q_p - \delta)|; \\ \text{при } \delta < |q| < \Delta + \delta \text{ и } q\dot{q} < 0: \\ k_p(q - \delta), & \text{если } |k_p(q - \delta)| > \\ & > |k_k(q - q_n) + k_n(q_n - \delta)|; \\ k_k(q - q_n) + k_n(q_n - \delta) + \beta\dot{q}, & \text{если } |k_p(q - \delta)| \leq \\ & \leq |k_k(q - q_n) + k_n(q_n - \delta)|; \\ \text{при } \frac{(k_k - k_n)\Delta}{k_k - k_p} \leq q \leq \Delta \\ \text{и } |q + \delta| > \Delta: \\ k_k(q - \Delta - \delta) + k_n\Delta + \beta\dot{q}, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\delta$  – величина зазора в соединении;  $q$  – деформация межвагонного соединения в продольном направлении;  $q_n, q_p$  – значения  $q$  в моменты изменения знака произведения  $q\dot{q}$  с «плюса» на «минус» ( $q_n$ ) и наоборот ( $q_p$ );  $k_n$  – жесткость соединения при нагрузке;  $k_p$  – жесткость соединения при разгрузке;  $k_k$  – жесткость конструкции вагона;  $\beta$  – коэффициент вязкости;  $\Delta$  – абсолютная деформация соединения, при которой поглощающие аппараты исчерпывают свой ход.

Взаимное смещение соответствующих точек  $k$ -го и  $(k+1)$ -го вагонов в продольном направлении  $q_{kk,k+1}$  при движении вагона с переменной скоростью вычисляется следующим образом:

$$q_{kk,k+1} = S_k + x_k - S_{k+1} - x_{k+1}, \quad (6)$$

где  $S_k, S_{k+1}$  – абсолютное перемещение  $k$ -го и  $(k+1)$ -го вагонов вдоль оси пути в продольном направлении, соответственно;  $x_k, x_{k+1}$  – продольное перемещение (подергивание) кузова  $k$ -го и  $(k+1)$ -го вагонов, соответственно.

Силы, действующие в автосцепных устройствах вагонов, воздействуют на вагоны в продольном, вертикальном и поперечном направлениях.

Значения поперечных составляющих сил, возникающих в межвагонных соединениях, зависят от конфигурации экипажа и вычисляются по методике, описанной в работе [5].

Для этого определяются координаты точки сцепления  $k$ -го ( $x_k, y_k$ ) и  $(k+1)$ -го ( $x_{k+1}, y_{k+1}$ ) вагонов. Ориентация линии, представляющей ориентацию двух ав-

тосцепных устройств относительно продольной оси  $x$ , записывается в виде

$$\beta_c = \arctg |(y_k - y_{k+1}) / (x_k - x_{k+1})|, \quad (7)$$

где  $y_k, y_{k+1}$  – горизонтальное поперечное перемещение кузова  $k$ -го и  $(k+1)$ -го вагонов.

Угол  $\alpha_k$  автосцепки у хвостовой части  $k$ -го вагона и угол автосцепки  $\alpha_{k+1}$  у головной части  $(k+1)$ -го вагона определяются следующим образом:

$$\alpha_k = \psi_k - \beta_c; \quad \alpha_{k+1} = \beta_c - \psi_{k+1}, \quad (8)$$

где  $\psi_k, \psi_{k+1}$  – углы, характеризующие мгновенную ориентацию продольной оси  $k$ -го и  $(k+1)$ -го вагонов относительно продольной оси пути (углы влияния кузовов  $k$ -го и  $(k+1)$ -го вагонов) соответственно.

После определения углов установки автосцепных устройств относительно продольно-поперечной плоскости можно вычислить поперечные составляющие силы, действующей в межвагонном соединении (см. рисунок):

$$\begin{aligned} F_k &= -S_{k,k+1} \operatorname{tg} \alpha_k; \\ F_{k+1} &= S_{k,k+1} \operatorname{tg} \alpha_{k+1}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $S_{k,k+1}$  – продольная сила, действующая в соединении  $k$ -го и  $(k+1)$ -го вагонов;  $F_k$  – поперечная сила, действующая на заднюю автосцепку  $k$ -го вагона;  $F_{k+1}$  – поперечная сила, действующая на переднюю автосцепку  $(k+1)$ -го вагона.

В пассажирских поездах используются безззорные сцепные устройства, работа которых описывается уравнениями (5) при  $\delta = 0$ . Кроме того, при рассмотрении движения пассажирских поездов принимается во внимание работа межвагонных площадок.

При движении поезда на каждый вагон действуют внешние силы, которые в зависимости от их направления могут оказывать сопротивление движению или, напротив, ускорять его. Внешними силами, действующими на поезд, являются сила тяги  $F_T$ , развиваемая локомотивом, тормозная сила  $B_k$ , возникающая при включении тормозов, и силы сопротивления движению  $W_k$ , к которым относят все остальные внешние силы.

В общем случае при переходных режимах движения внешние силы  $F_k^*$ , действующие на локомотив ( $k=1$ ) и  $k$ -й вагон, могут быть представлены в виде

$$F_1^* = W_1 + B_1 + F_T; \quad F_k^* = W_k + B_k. \quad (10)$$

При этом сила тяги прикладывается к первому вагону, а силы торможения прикладываются к колесным парам вагонов поезда с учетом транспортного

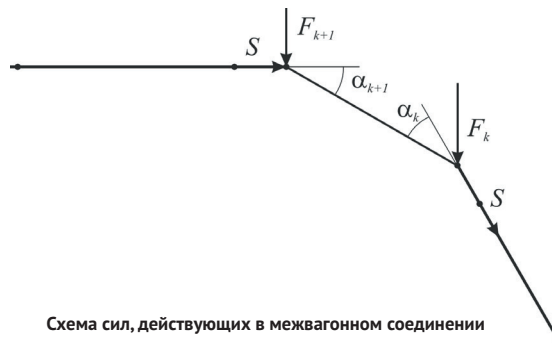


Схема сил, действующих в межвагонном соединении

запаздывания, которое зависит от скорости распространения тормозной волны и геометрических размеров вагона. Силы торможения и тяги изменяются во времени в соответствии с заданными характеристиками.

После подстановки в (1) полученных для каждого вагона выражений кинетической и потенциальной энергий, функции рассеяния энергии, обобщенных и внешних сил получается система  $n^*K$  нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка каждое, где  $K$  – количество вагонов, представленных пространственной разветвленной системой.

Таким образом, математическая модель движения рассматриваемого поезда представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений ( $n^*K + N$ ) второго порядка каждое ( $N$  – количество вагонов, расчетная схема которых представлена одной массой).

В общем случае поезд может состоять из вагонов различной конфигурации (для грузовых поездов – крытый вагон, полувагон, вагон-хоппер, вагон-цистерна и т. д.; для пассажирских поездов – пассажирский вагон, моторный и тяговый вагоны электропоезда и т. д.). При этом вагоны поезда могут иметь разную степень загрузки. В том случае, когда в составе неоднородного грузового поезда находятся вагоны-цистерны, транспортирующие жидкий груз, необходимо учитывать подвижность жидкости, так как котел цистерны заполняется с техническим недоливом, позволяющим компенсировать увеличение объема груза при увеличении температуры. Наличие свободной поверхности жидкости приводит к появлению волновых движений, которые влияют на динамические характеристики экипажа [6, 7].

На основании составленной математической модели движения грузового поезда авторами была разработана компьютерная программа, в которой использован описанный комбинированный подход, когда часть экипажей в составе поезда представляется упро-

щенными расчетными схемами, а отдельные вагоны – достаточно подробно с учетом специфики конструкции и особенностей транспортируемого груза. Программа позволяет адекватно отображать динамические процессы, сопровождающие движение как отдельных вагонов, так и полносоставного поезда, сформированного из вагонов разных типов, на участках пути произвольного очертания при заданных режимах движения. Формирование поезда по массе вагонов и их месторасположению в составе поезда может задаваться произвольным порядком. Режим движения поезда (набор тяги, движение с постоянной скоростью, торможение) задается произвольным образом независимо от конфигурации участка пути, по которому он движется. По результатам исследования динамики грузового поезда могут быть разработаны рекомендации по его формированию и ведению. ■

### Литература

1. Блохин Е.П., Манашкин Л.А. Динамика поезда: нестационарные продольные колебания. М.: Транспорт, 1982. 222 с.
2. Автоколебания и устойчивость движения рельсовых экипажей / Ю.В. Демин, Л.А. Длугач, М.Л. Коротенко, О.М. Маркова. Киев: Наук. думка, 1984. 160 с.
3. Радченко Н.А. Криволинейное движение рельсовых транспортных средств. Киев: Наук. думка, 1988. 212 с.
4. Математическое моделирование колебаний рельсовых транспортных средств / В.Ф. Ушкалов, Л.М. Резников, В.С. Иккол и др. Киев: Наук. думка, 1989. 240 с.
5. Garg V., Dukkipati R. Dynamics of Railway Vehicle Systems. Toronto: Acad. press, 1984. 407 p.
6. Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968. 532 с.
7. Богомаз Г.И. Динамика железнодорожных вагонов-цистерн. Киев: Наук. думка, 2004. 223 с.