

Моделирование многомерного случайного возмущения в задачах динамики рельсовых экипажей



А. Н. Савоськин,
д-р техн. наук, профессор
кафедры «Электропоезда
и локомотивы»
Института транспортной
техники и систем
управления Московского
государственного
университета путей
связи (ИТТСУ МИИТ)



Ю. С. Ромен,
д-р техн. наук, профессор,
главный научный
сотрудник отделения
«Перспективное развитие
сети железных дорог
и целевые программы»
ОАО «ВНИИЖТ»



А. А. Акишин,
аспирант кафедры
«Электропоезда
и локомотивы»
ИТТСУ МИИТ

Предложена методика выбора параметров генерации многомерного случайного процесса возмущения, которая обеспечивает реализацию заданного частотного диапазона, необходимого для моделирования колебаний исследуемых рельсовых экипажей при движении со скоростью от 10 до 150 м/с.

Генерация многомерного случайного процесса возмущения $\|y(t)\|$ на ЭВМ во временной области проводится по его известным характеристикам – матрице авто- и взаимных корреляционных функций $\|R_{iust}(\tau)\|$ или матрице спектральных и взаимных спектральных плотностей $\|\Phi_{iust}(jf)\|$ [2]. При этом не коррелирующие между собой временные последовательности $x_i[nT]$, получаемые с помощью типовых программ генераторов белого шума, необходимо преобразовать в многомерный гауссовский стационарный случайный процесс $\|\eta_{iust}(n\Delta x = vnT)\|$ с заданной матрицей спектральных плотностей $\|G_{yiu}(j\omega)\|$ размером $i \times u = m \times m$, где $i = 1, 2, 3, \dots, m$ и $u = 1, 2, 3, \dots, m$, с использованием матриц частотных характеристик, получаемых на основе решения задачи факторизации.

Для решения этой задачи предложен новый алгоритм, основанный на использовании временных характеристик формирующих фильтров. Процессы на выходе ПШ, дискретные, и вначале, как и в [2], необходимо получить матрицу дискретных спектральных плотностей $\|G_{\eta iu}(z)\|$ выходного процесса $\eta[nT]$, выполнив дискретное преобразование Лапласа

$$X(z) = Z\{x(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n},$$

$$(z = e^q = e^{pT}) \quad (1)$$

матрицы корреляционных функций $\|R_{\eta iu}(nT)\|$:

$$\|G_{\eta iu}(z)\| = Z\{\|R_{\eta iu}(nT)\|\}. \quad (2)$$

Затем необходимо представить матрицу $\|G_{\eta iu}(z)\|$ в виде:

$$\|G_{\eta iu}(z)\| = \|W_{iu}^*(z)\| \times$$

$$\times \|W_{iu}(z)\| \cdot \|G_{x iu}(z)\|, \quad (3)$$

где $\|W_{iu}^*(z)\|$ – матрица дискретных частотных характеристик, эрмитовски сопряженная с матрицей частотных характеристик $\|W_{iu}(z)\|$ формирующих фильтров; $\|G_{x iu}(z)\|$ – матрица единичных спектральных плотностей некоррелированных сигналов на выходе генераторов белого шума размером $m \times m$:

$$\|G_{x iu}(z)\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Задача решается во временной области, поэтому в отличие от [2] матрицу $\|W_{iu}(z)\|$ необходимо преобразовать в матрицу импульсных характеристик формирующих фильтров с помощью обратного дискретного преобразования Лапласа:

$$\|k_{iu}(nT)\| = Z^{-1}\{\|W_{iu}(z)\|\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} \|W_{iu}(z)\| e^{qn} dq. \quad (5)$$

Зная входной процесс $x_i[nT]$ и импульсные характеристики, определяющие динамические свойства формирующего фильтра во временной области, можно найти выходной процесс $\eta_{iu}(nT)$ с помощью интеграла свертки:

$$\eta_{iu}[nT] = \int_0^n k_{iu}[nT-s] x_{iu}(s) ds. \quad (6)$$

Реализация этого алгоритма может быть выполнена по новой схеме формирующего механизма (рис. 1), который

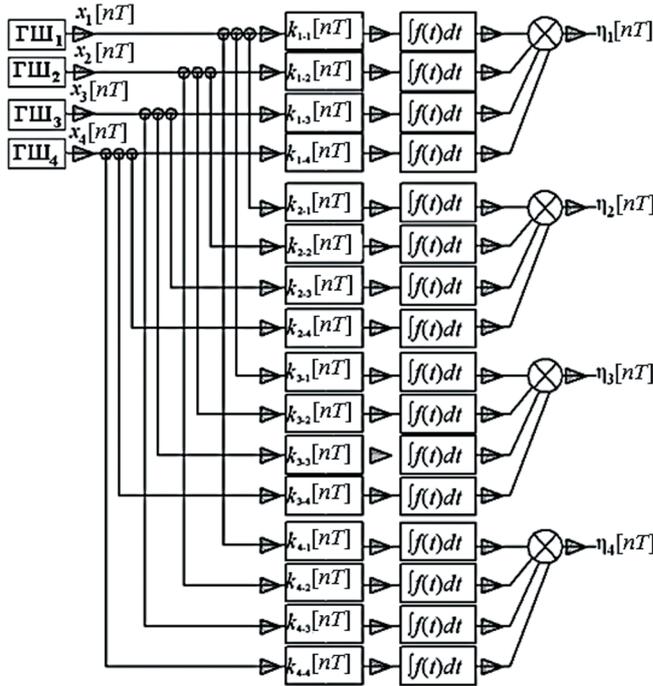


Рис. 1. Структурная схема формирующего механизма во временной области

содержит импульсные характеристики $k_{ij}[nT]$ и интеграторы, выполняющие вычисление интеграла свертки (6).

В качестве примера рассмотрим генерацию четырехмерного гауссовского стационарного случайного процесса возмущений в виде вертикальных и горизонтальных неровностей $\eta_{iust}(x = vt)$ левого и правого рельсов, вызывающего колебания рельсовых экипажей по аналитическому выражению корреляционной функции, приведенному в [1].

Выполним прямое дискретное преобразование Лапласа аналитического выражения для корреляционной функции в программном пакете MatLAB с

помощью команды «ztrans» и получим выражение для дискретных спектральных плотностей в виде

$$G_{iust}(z) = S_{iust}^2 \sum_k a_{kiust}^2 \times \frac{\left\{ \exp\left[-\alpha_{kiust}^2 (\Delta x)^2\right] \right\} \cdot \left[\cos\beta_{kiust} \Delta x \right] z^2 + \left\{ \exp\left[-\alpha_{kiust}^2 (\Delta x)^2\right] \right\} z^2 + \left\{ \exp\left[-\alpha_{kiust}^2 (\Delta x)^2\right] \right\} z}{+2 \left\{ \exp\left[-\alpha_{kiust}^2 (\Delta x)^2\right] \right\} \cdot \left[\cos\beta_{kiust} \Delta x \right] z + 1} \quad (7)$$

Факторизовав (7) в программном пакете MatLAB с помощью оператора «factor», найдем аналитическое выра-

жение для элементов матрицы передаточных функций:

$$W_{iust}(z) = S_{iust} \sum_k a_{kiust} \times \frac{\left\{ \exp\left[-\alpha_{kiust}^2 (\Delta x)^2\right] \right\} \cdot \left[\cos\beta_{kiust} \Delta x \right] z + \left\{ \exp\left[-\alpha_{kiust}^2 (\Delta x)^2\right] \right\} z^2 + \left\{ \exp\left[-\alpha_{kiust}^2 (\Delta x)^2\right] \right\}}{\sqrt{+2 \left\{ \exp\left[-\alpha_{kiust}^2 (\Delta x)^2\right] \right\} \cdot \left[\cos\beta_{kiust} \Delta x \right] z + 1}} \quad (8)$$

Выполнив обратное z-преобразование для $W_{iu}(z)$ с помощью команды «iztrans», перейдем к импульсным характеристикам:

$$k_{iust}[n\Delta x] = S_{iust} \sum_k a_{kiust} \exp\left[\left(\alpha_{kiust} \Delta x\right)^2\right] \times \frac{\cos\left[\beta_{kiust} (n+1-n_{ciust}) \Delta x\right]}{\left\{ \exp\left[\left(\alpha_{kiust} \Delta x\right)^2\right] \right\}^{(n+1-n_{ciust}) \Delta x}}, \quad (9)$$

или окончательно

$$k_{iust}[n\Delta x] = S_{iust} \sum_k a_{kiust} \left\{ \exp\left[-\left(\alpha_{kiust} \Delta x\right)^2\right] \right\}^{(n-n_{ciust}) \Delta x} \times \cos\left[\beta_{kiust} (n+1-n_{ciust}) \Delta x\right] \quad (10)$$

Было выполнено сравнение графиков импульсных характеристик, построенных по этому выражению, и корреляционных функций со значениями параметров, приведенными в [1]. Для примера на рис. 2 приведено такое сравнение для автокорреляционных функций и импульсных характеристик горизонтальной неровности правого рельса и взаимной корреляционной функции, а также импульсной характеристики вертикальной неровности левого и горизонтальной неровности правого рельсов. Сравнение графиков $R_{iust}[n\Delta x]$

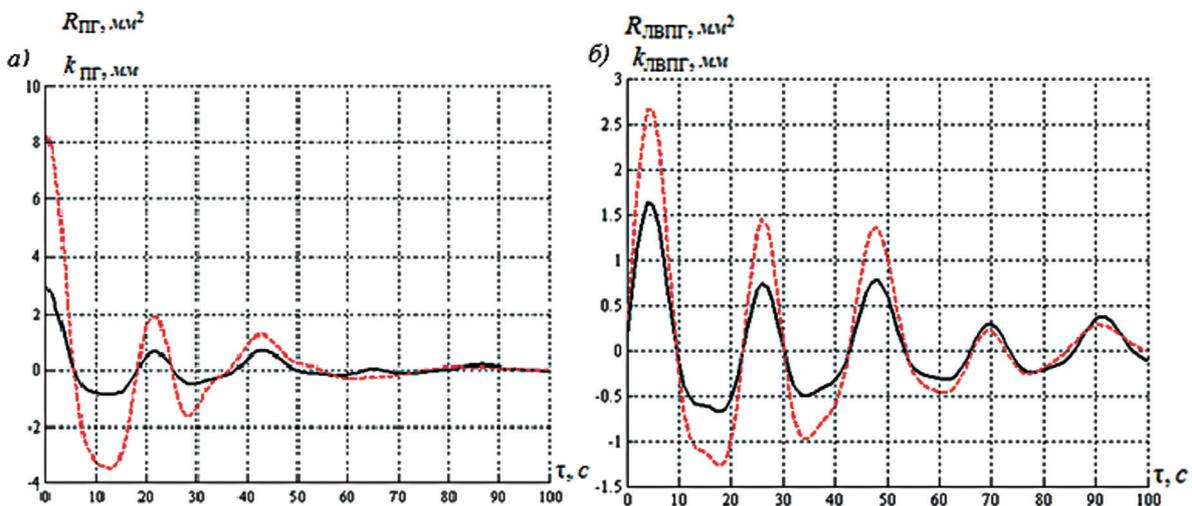


Рис. 2. Графики импульсной характеристики (сплошные линии) и корреляционной функции (пунктир) горизонтальной неровности правого рельса (а); взаимной корреляционной функции и импульсной характеристики вертикальной неровности левого рельса и горизонтальной неровности правого рельса (б)

и $k_{msl}[n\Delta x]$ свидетельствует о том, что эти процессы затухают практически синхронно. Это означает, что $k_{msl}[n\Delta x]$ достаточно адекватно описывает динамические свойства формирующего фильтра во временной области.

Выражение (10) для импульсной характеристики формирующего механизма соответствует дифференцируемому случайному процессу и может быть использовано не только при решении задачи генерации многомерного случайного процесса геометрических

неровностей пути, но и при решении аналогичных задач в различных приложениях.

По найденным импульсным характеристикам с использованием интеграла свертки была выполнена генерация многомерного случайного процесса во временной области по схеме формирующего механизма, приведенной на рис. 1. Результаты генерации одной из совокупностей реализаций четырехмерного случайного процесса геометрических неровностей пути (рис. 3), выполнен-

ные по рассмотренному алгоритму, показывают, что сгенерированные случайные процессы в среднем близки к исходным.

Для более подробного сравнения вычислены корреляционные функции и спектральные плотности для сгенерированных случайных процессов по [1], выполнено их сравнение с графиками заданных корреляционных функций и спектральных плотностей реального рельсового пути по выражениям, приведенным в [1].

Для примера на рис. 3 приведены некоторые графики для авто- и взаимных корреляционных функций, а на рис. 4, 5 – соответствующие им спектральные и взаимные спектральные плотности. Эти графики, построенные по сгенерированным реализациям, имеют удовлетворительную сходимость с заданными. Некоторое расхождение между ними объясняется особенностями функционирования генераторов белого шума, а также погрешностями спектрального анализа и не превышает расхождений, имеющих место при аппроксимации характеристик, полученных по экспериментальным данным [1].

Таким образом, решена задача по разработке алгоритма генерации многомерной геометрической неровности рельсового пути. Используя этот алгоритм, можно генерировать такую неровность при различных значениях скорости движения с любыми длиной реализации и шагом дискретизации. Это позволит численно решать во временной области многомерные задачи динамики подвижного состава с нелинейными характеристиками рессорного подвешивания.

Однако вследствие ограниченной длины реализации случайных возмущений, равной ≈ 1 км, максимум низкочастотной части спектра был ограничен высшей длиной волны неровности $L_b = 50$ м, а максимум высокочастотной составляющей соответствовал $L_n = 6,25$ м. При решении задач динамики частотный диапазон возмущения должен быть в пределах от $f_n = 0,2$ Гц до $f_b = 10$ Гц.

Эти низшая и высшая частоты связаны с соответствующими длинами волн соотношениями

$$f_n = \frac{v}{L_b}; \quad (11)$$

$$f_b = \frac{v}{L_n}, \quad (12)$$

где v – скорость движения, м/с.

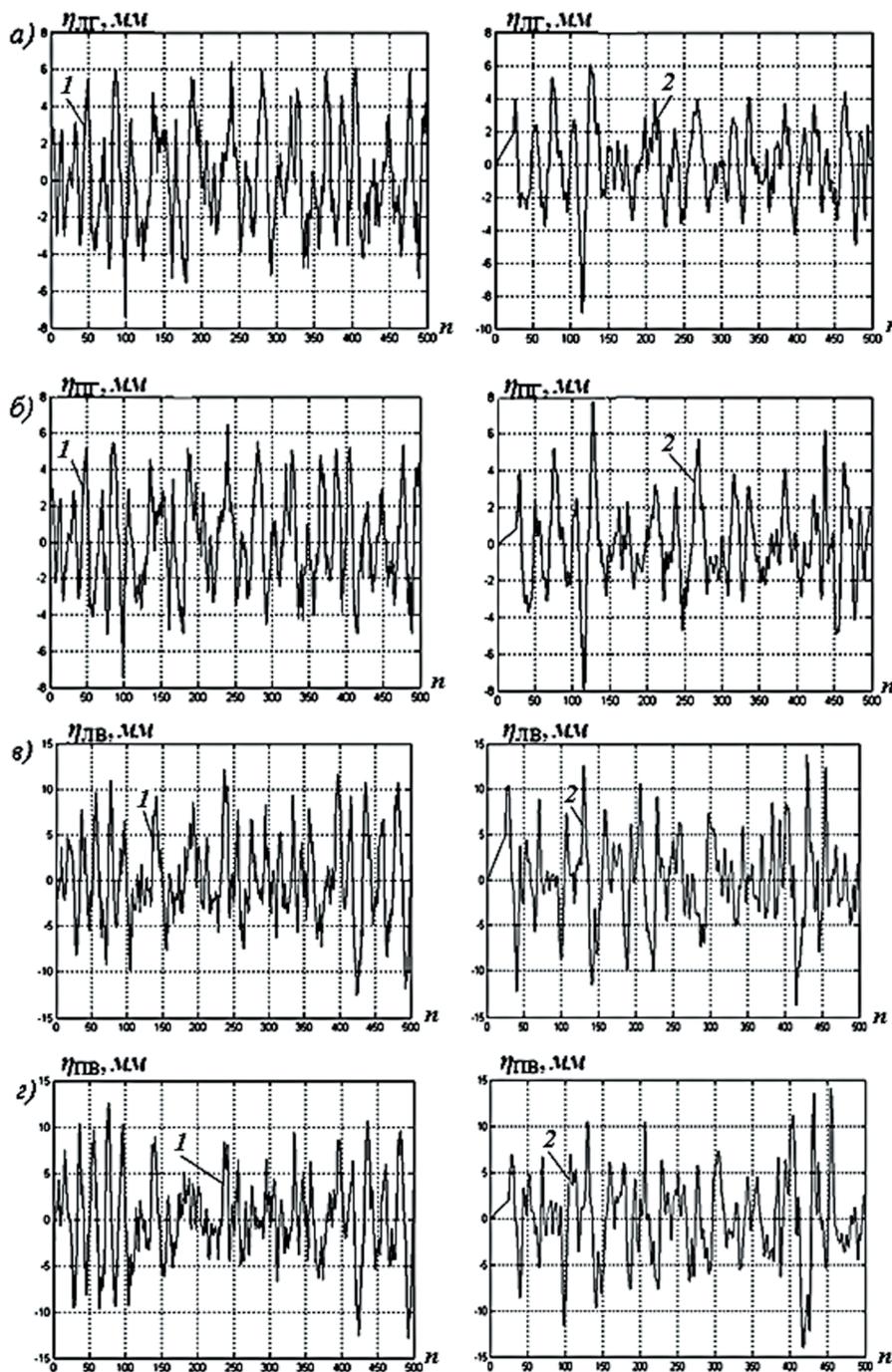


Рис. 3. Реализации четырехмерного случайного процесса геометрической неровности рельсов: 1 – сгенерированные, 2 – исходные; горизонтальные левого (а) и правого (б) рельсов; вертикальные левого (в) и правого (г) рельсов

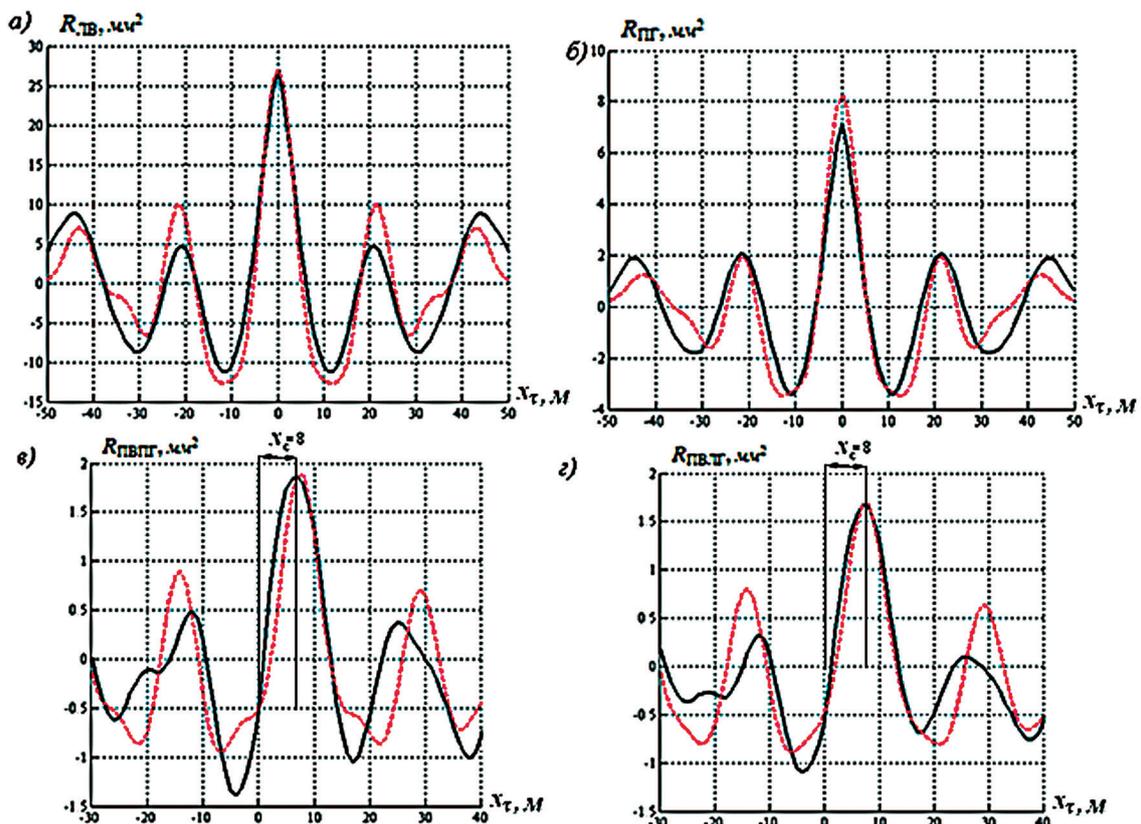


Рис. 4. Автокорреляционные функции неровностей пути: левого рельса вертикальная (а) и правого рельса горизонтальная (б); взаимные корреляционные функции между правой вертикальной и горизонтальной неровностью рельсов (в); правой вертикальной и левой горизонтальной неровностью рельсов (г): здесь и на рис. 5, 6 сгенерированные – сплошные линии; по аналитическому выражению – пунктир

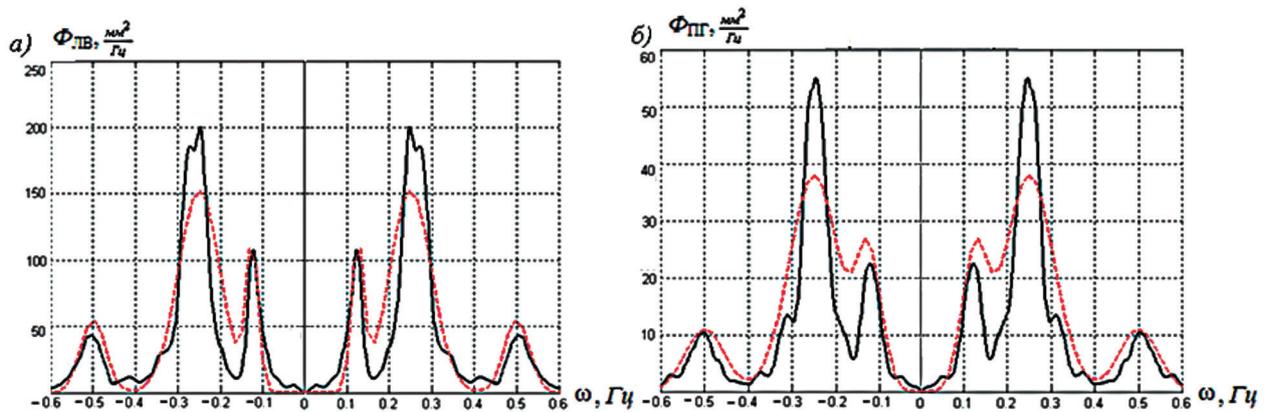


Рис. 5. Спектральные плотности неровностей: левого рельса вертикальных (а) и правого рельса горизонтальных (б)

В связи с этим при увеличении скорости движения частотный диапазон возмущения смещается в сторону высоких частот и может выйти за пределы диапазона частот колебаний системы. В этом случае возмущение практически перестанет возбуждать колебания и полученные результаты окажутся некорректными.

Определим требования к длине волн неровностей, которые должны быть в спектре возмущения, для решения задач динамики при значениях скорости

движения от 10 до 150 м/с, т. е. от 36 до 540 км/ч. Необходимую длину реализации определим по эмпирической формуле

$$t_p = \frac{5 \div 10}{f_n}; \quad (13)$$

$$T = \frac{1}{(5 \div 10)f_b}. \quad (14)$$

При принятом значении нижней частоты процесса $f_n = 0,2$ Гц длина ре-

ализации составит $t_p = \frac{10}{0,2} = 50$ с. Такой

величине t_p соответствует длина реализации (метры), равная

$$L_p = vt_p = 50v \text{ м}. \quad (15)$$

Для выделения заданного значения высшей частоты процесса $f_b = 10$ Гц шаг дискретизации по времени примем

равным $T = \frac{1}{10f_b} = 0,01$ с, что соответ-

ствует шагу по пути

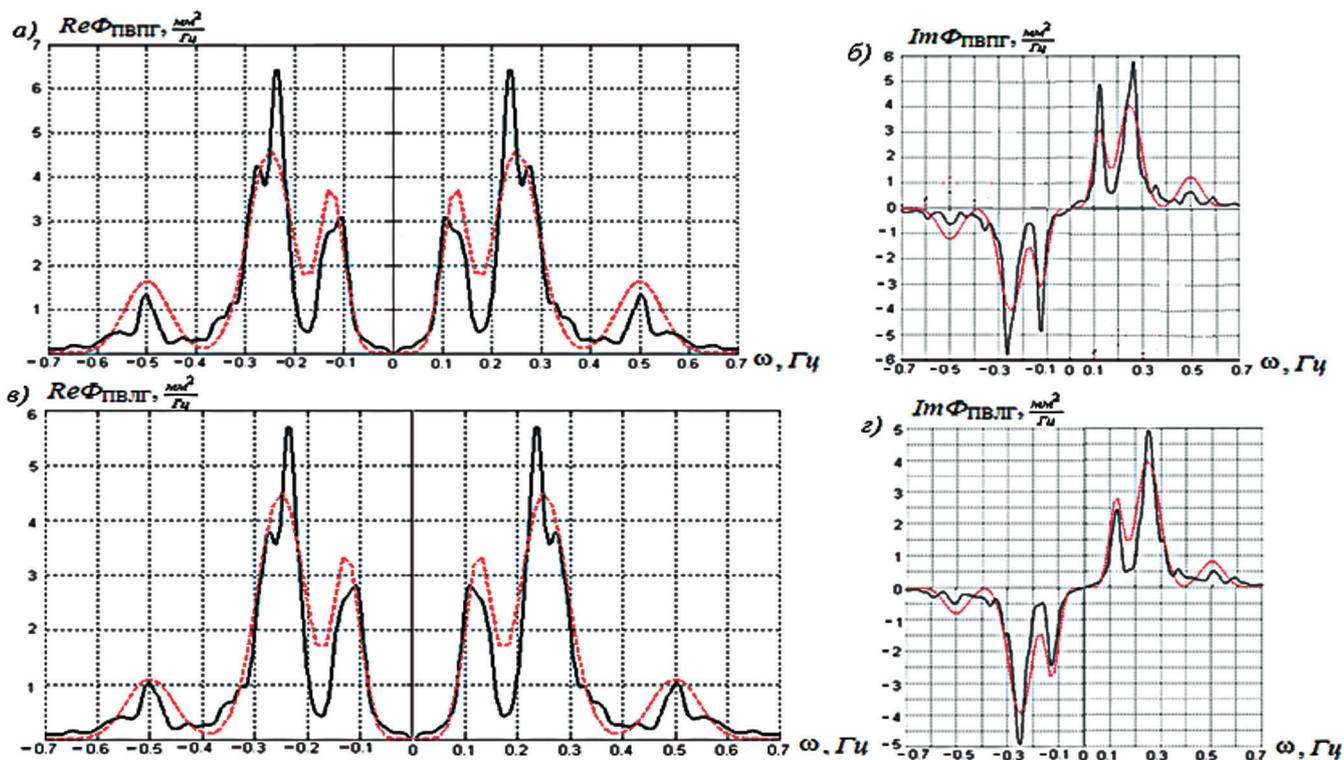


Рис. 6. Составляющие взаимной спектральной плотности между правой вертикальной и правой горизонтальной неровностями рельсов: а – вещественная; б – мнимая, и составляющие взаимной спектральной плотности между правой вертикальной и левой горизонтальной неровностями рельсов: в – вещественная; г – мнимая

$$\Delta x = vT = 0,01v \text{ м.} \quad (16)$$

При заданных значениях нижней и верхней частот количество точек реализации составит

$$N_p = \frac{t_p}{T} = \frac{L_p}{\Delta x} = 5000. \quad (17)$$

В соответствии с этим при скорости 150 м/с длина реализации процесса возмущения L_p , необходимая для корреляционно-спектрального анализа, должна быть не менее $L_p = 50 \times 150 = 7500$ м. Записи случайных процессов возмущения такой протяженности должны удовлетворять условиям стационарности, т. е. должны быть выполнены на площадке с однородной конструкцией пути при движении по прямому пути (без укло-

нов и кривых). Выполнить эти условия на пути такой протяженности практически невозможно, поэтому для получения достаточно продолжительной реализации восьмикратно повторим с соответствующими переходами использованную в [1] реализацию длиной $L_p = 999$ м, каждый раз изменяя ее направление, чтобы избежать совпадений. При получении этой реализации в [1] было сделано $N = 5400$ замеров неровностей с шагом $\Delta x = 0,185$ м. Таким образом, общая длина реализации составит $L_{\text{роб}} = 8L_p = 7992$ м с шагом дискретизации $\Delta x = 0,185$ м и общим числом замеров $N_{\text{об}} = 43200$. Спектральный анализ реализации четырехмерного случайного процесса неровности рельсов с такими параметрами, отнесенной к скорости движения $v = 1$ м/с, был выполнен по

методике, изложенной в [1]. Спектральная плотность (рис. 7) была аппроксимирована аналитическим выражением с восемнадцатью слагаемыми ($k = 18$). Некоторые параметры слагаемых приведены в таблице.

В составе спектральной плотности имеется целый ряд максимумов, проходящихся на длины волн неровностей от 6,5 до 750 м, что во много раз превышает диапазон длин волн 12,5–50 м, полученный в [1] при анализе исходных экспериментальных данных. Такой расширенный диапазон длин волн обеспечивает возможность моделирования колебаний рельсовых экипажей при скорости движения вплоть до 150 м/с, так как в соответствии с (11) нижней частоте процесса $f_{\text{н}} = 0,2$ Гц соответствует длина волны 750 м.

Параметры аналитического выражения корреляционной функции горизонтальной неровности левого рельса

K	$L_p, \text{ м}$	$\beta, \text{ м}^{-1}$	$\alpha, \text{ м}^{-1}$	a	k	$L_p, \text{ м}$	$\beta, \text{ м}^{-1}$	$\alpha, \text{ м}^{-1}$	a
1	6,25	$16 \cdot 10^{-2}$	$32 \cdot 10^{-3}$	$234 \cdot 10^{-4}$	10	350	$28 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-5}$	$16 \cdot 10^{-4}$
2	12,5	$800 \cdot 10^{-4}$	$22 \cdot 10^{-3}$	$1953 \cdot 10^{-4}$	11	400	$25 \cdot 10^{-4}$	$14 \cdot 10^{-5}$	$14 \cdot 10^{-4}$
3	25,0	$400 \cdot 10^{-4}$	$10 \cdot 10^{-3}$	$5078 \cdot 10^{-4}$	12	450	$22 \cdot 10^{-4}$	$11 \cdot 10^{-5}$	$65 \cdot 10^{-5}$
4	50,0	$200 \cdot 10^{-4}$	$28 \cdot 10^{-4}$	$1823 \cdot 10^{-4}$	13	500	$20 \cdot 10^{-4}$	$25 \cdot 10^{-3}$	$39 \cdot 10^{-5}$
5	100	$100 \cdot 10^{-4}$	$12 \cdot 10^{-4}$	$521 \cdot 10^{-4}$	14	550	$18 \cdot 10^{-4}$	$45 \cdot 10^{-6}$	$36 \cdot 10^{-5}$
6	150	$67 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$208 \cdot 10^{-4}$	15	600	$16 \cdot 10^{-4}$	$41 \cdot 10^{-6}$	$20 \cdot 10^{-5}$
7	200	$60 \cdot 10^{-4}$	$35 \cdot 10^{-5}$	$99 \cdot 10^{-4}$	16	650	$15 \cdot 10^{-4}$	$61 \cdot 10^{-6}$	$41 \cdot 10^{-5}$
8	250	$40 \cdot 10^{-4}$	$45 \cdot 10^{-5}$	$26 \cdot 10^{-4}$	17	700	$14 \cdot 10^{-4}$	$21 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-5}$
9	300	$33 \cdot 10^{-4}$	$31 \cdot 10^{-5}$	$18 \cdot 10^{-4}$	18	750	$13 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$1,4 \cdot 10^{-5}$

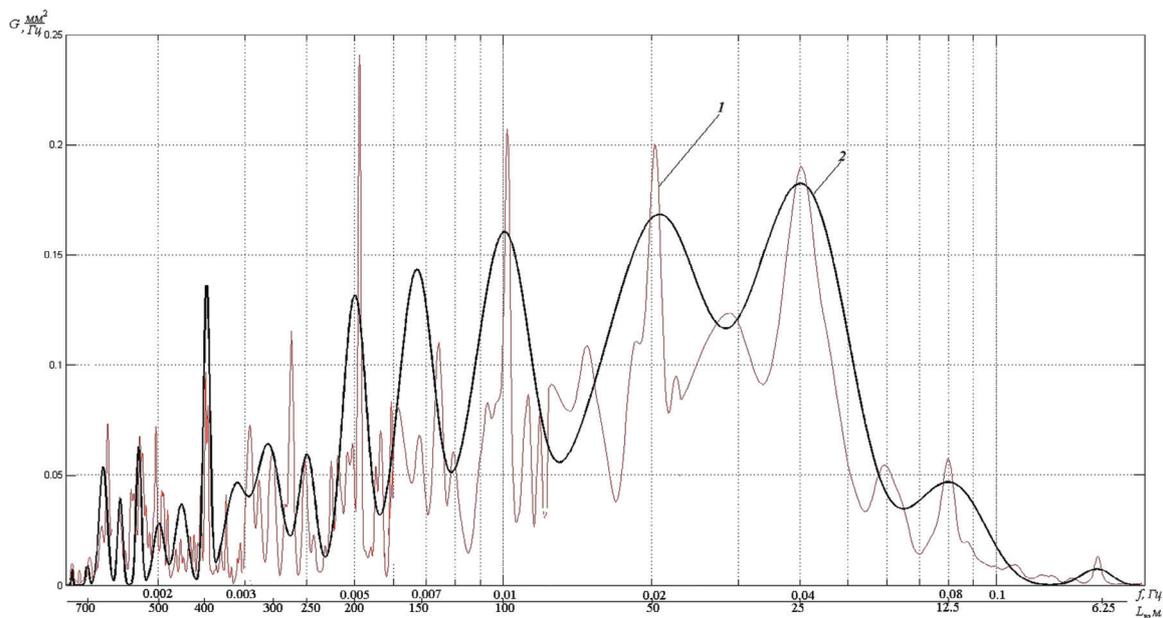


Рис. 7. Графики спектральной плотности горизонтальной неровности левого рельса: 1 – экспериментальная; 2 – по аналитическому выражению

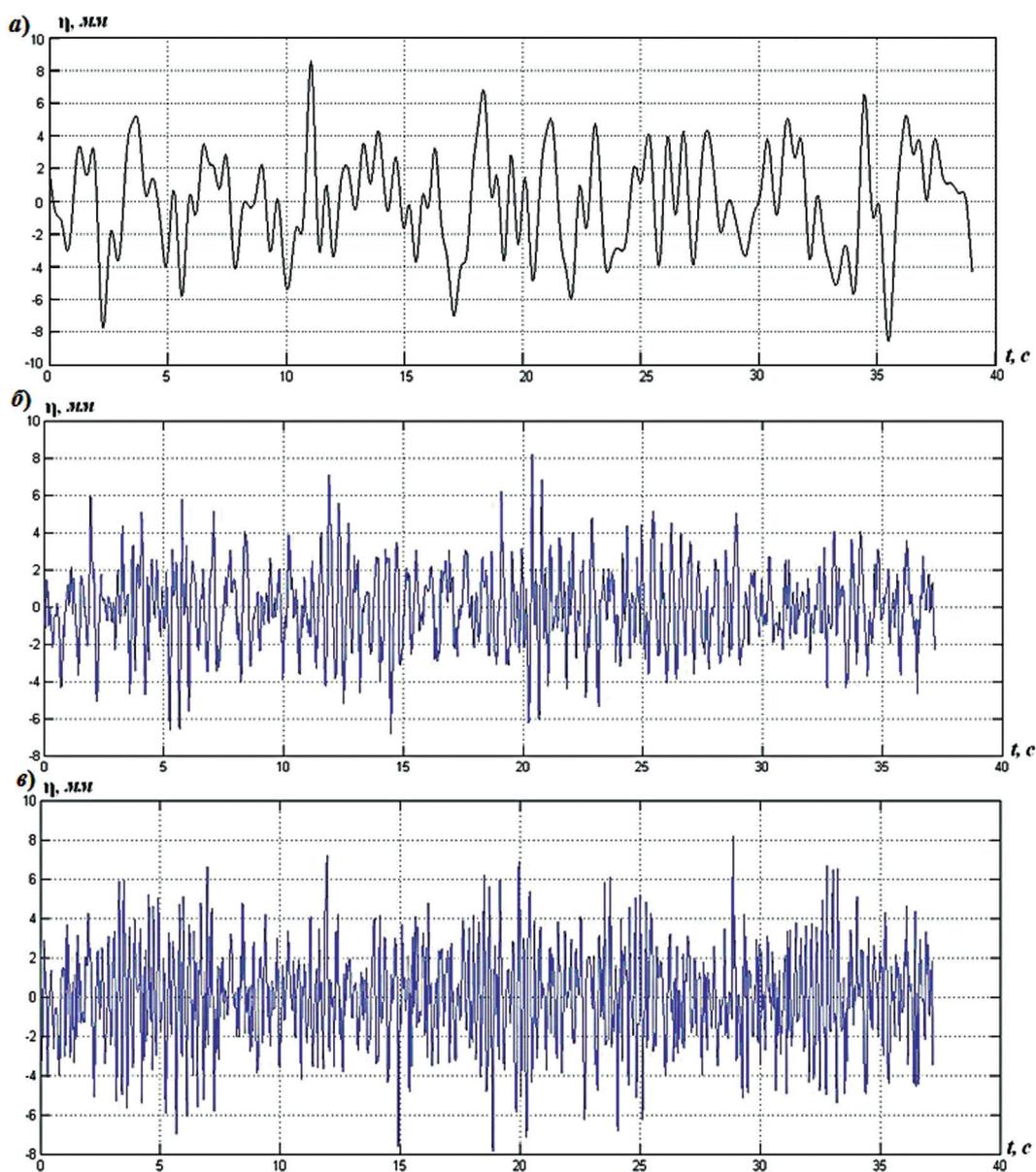


Рис. 8. Графики сгенерированных реализаций случайного процесса горизонтальной неровности левого рельса, построенные для скорости движения 20 м/с (а), 60 м/с (б), 120 м/с (в)

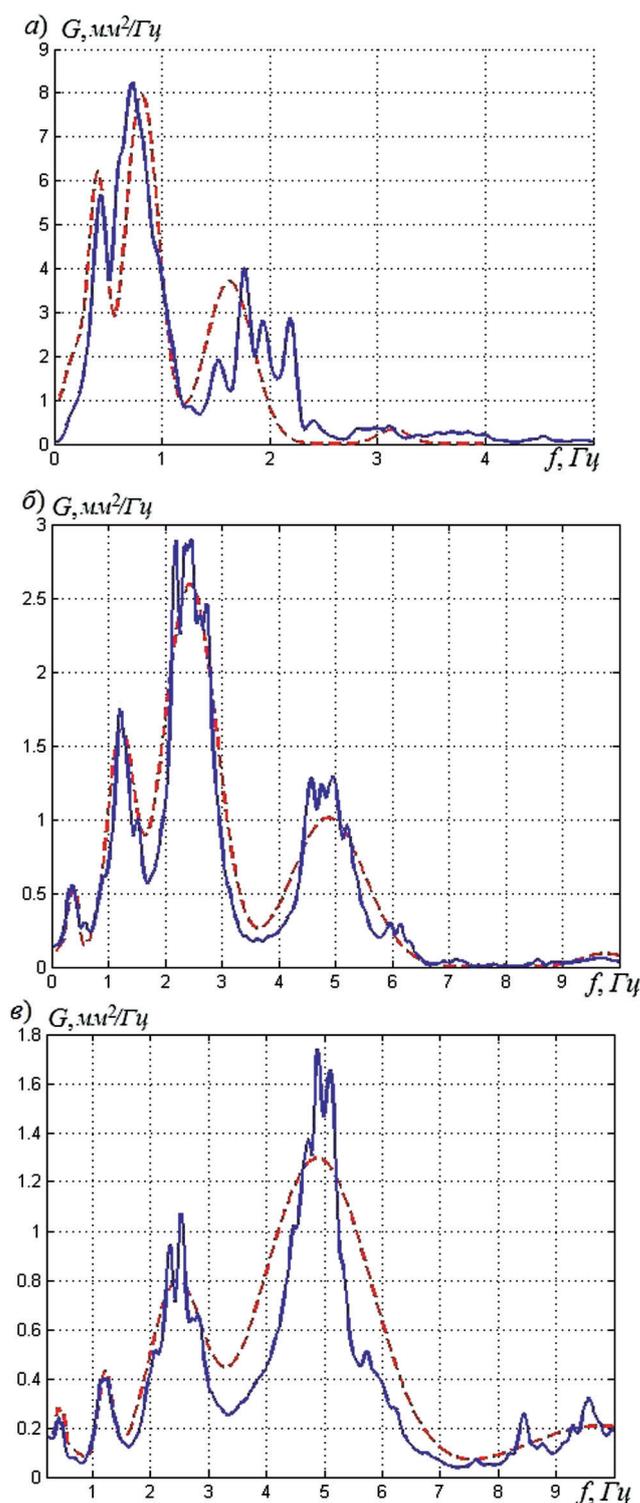


Рис. 9. График спектральных плотностей горизонтальной неровности левого рельса для решения задач динамики при скорости движения: 20 м/с (а), 60 м/с (б), 120 м/с (в)

Аналогичные процедуры были выполнены и для других неровностей, что дало возможность получить полную матрицу спектральных и взаимных спектральных плотностей, а также авто- и взаимных корреляционных функций.

Для примера были сгенерированы возмущения для скорости $v = 20$ м/с, 60 м/с и 120 м/с. Из графиков сгене-

рированных реализаций случайного процесса горизонтальной неровности рельса (рис. 8) следует, что с ростом скорости движения, как и следовало ожидать, увеличивается частота возмущения.

Графики спектральных плотностей возмущения для исследуемых значений скорости движения показывают, что вся энергия процессов приходит-

ся на выбранный диапазон частот 0,2–10 Гц (рис. 9). С ростом скорости вид спектральных плотностей изменяется: увеличивается доля высокочастотных составляющих. Если при скорости движения $v = 20$ м/с (рис. 9а) максимум $G(f)$ приходится на частоты 0,8–1,0 Гц, то при $v = 60$ м/с (рис. 9б) – на диапазон 1,5–2,7 Гц, а при $v = 120$ м/с (рис. 9в) – на диапазон 2,2–4,8 Гц. При этом изменяются и ординаты максимумов. Кроме того, с ростом скорости движения уменьшаются отклонения спектральных плотностей сгенерированных и заданных случайных процессов.

Таким образом, разработанная методика генерации случайных процессов обеспечивает получение возмущений в необходимом диапазоне частот при заданных значениях скорости движения от 10 до 150 м/с. При этом реализацию возмущения необходимо генерировать заново для каждого исследуемого значения скорости, выбирая длину реализации и шаг дискретизации на основе предложенных соотношений.

Таким образом, разработанный алгоритм генерации многомерного случайного процесса на основе импульсных характеристик и интеграла свертки позволяет решать эту задачу на ЭВМ во временной области. Предложенная методика выбора параметров генерации многомерного случайного процесса возмущения обеспечивает реализацию заданного частотного диапазона, необходимого для моделирования колебаний исследуемых рельсовых экипажей. Приведенные примеры генерации многомерного случайного процесса возмущения при различных значениях скорости движения свидетельствуют, что с ростом скорости увеличивается высокочастотная составляющая процесса, а спектральный анализ сгенерированных реализаций возмущения соответствует заданному частотному диапазону колебаний системы от 0,2 до 10 Гц. ■

Литература

1. Ромен Ю.С., Савоськин А.Н., Акишин А.А. Анализ случайных процессов геометрических неровностей рельсовых нитей // Изв. ПГУПС. 2014. № 1 (38). С. 22–32.
2. Матыаш И., Шилханек Я. Генератор случайных процессов с заданной матрицей спектральных плотностей // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21, № 1. С. 29–34.