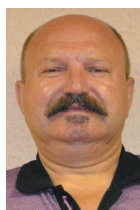


Аналитическое описание диаграммы растяжения металлов на основе упругоинертной модели



Г. М. Волохов,
д-р техн. наук,
заведующий
лабораторией
ОАО «Научно-
исследовательский
и конструкторско-
технологический
институт подвижного
состава»
(ОАО «ВНИКТИ»)



Д. А. Князев,
научный сотрудник
ОАО «ВНИКТИ»



М. В. Тимаков,
инженер
ОАО «ВНИКТИ»

Рассматривается введение элемента «инертность» и понятий вероятности разрыва и вероятности восстановления упругого элемента. Представлено качественное объяснение возникновения петли гистерезиса на конкретной модели. Приведено расчетное построение кривой растяжения в координатах сила – деформация.

Структурными элементами основных реологических моделей металлов Максвелла, Фойгта и Кельвина [1] являются упругий и вязкий элементы.

Определяющим соотношением для упругого элемента является закон Гука $\sigma = E\varepsilon$, где σ – механическое напряжение, E – модуль Юнга, ε – относительная деформация. Если наделить упругий элемент способностью скачкообразно менять зависимость силы упругости, возникающей в нем, от деформации (например, рваться), то можно описать его соотношением

$$F_l = \begin{cases} -k \cdot \Delta l, & 0 < \Delta l \leq \Delta l_0 \\ 0, & \Delta l > \Delta l_0 \\ -k' \cdot \Delta l, & \Delta l < 0 \end{cases}, \quad (1)$$

где k и k' – жесткость; Δl – абсолютная деформация.

Иными словами, при накоплении в упругом элементе при растяжении энергии E_0 он переходит в новое состояние, в котором перестает быть упругим элементом (взаимодействия нет). Предлагается называть эти состояния полноценной связью и дефектной связью.

Переход из одного состояния в другое и обратно – это вероятностные процессы. Допускаются вероятности наступления события перехода упругого элемента в неупругое состояние (вероятность разрыва связи) P_p и возврата в исходное упругое состояние (вероятность восстановления связи) P_v .

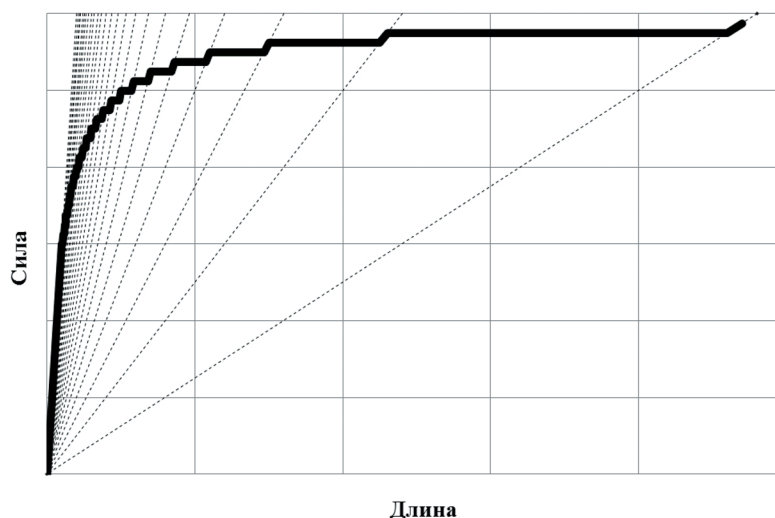


Рис. 1. Достижение силой критического значения по деформации модели абсолютно пластического тела

Если дополнительно ввести элемент «инертность» как некое хранилище запаса кинетической энергии, то основной физической характеристикой такого элемента будет масса как мера способности элемента препятствовать изменению его кинетической энергии, а определяющим соотношением будет второй закон Ньютона в форме $\bar{F} = m\bar{a}$, где \bar{F} – сила, m – масса, \bar{a} – ускорение.

Основываясь на предложенной модели, можно описать упруго-инертный процесс поведения материала реального тела, состоящего из большого числа элементов, и построить диаграмму растяжения в координатах сила – абсолютное удлинение.

Если допустить, что во время совершения работы A_0 и растяжения модели в среднем стабильно случайным образом один элемент будет переходить в неупругое состояние, то можно оценить конечное усилие, при котором начнется лавинообразное увеличение дефектных связей, а следовательно, быстрое увеличение длины модели в условиях действия постоянной внешней силы.

На рис. 1 пунктиром обозначены линейные зависимости между силой и деформацией для одного, двух, трех и т. д. упругих элементов (справа налево). График показывает зависимость между силой и абсолютным удлинением.

На начальном этапе (в левой части рис. 1), когда все элементы упругие, зависимость силы от удлинения линейна и описывается первой пунктирной линией. Как только одна из связей стала дефектной, т. е. один из элементов перестал быть упругим, деформация модели описывается второй пунктирной линией, далее – аналогичным образом. При последовательном увеличении силы форма кривой растяжения отличается от первоначальной – линейной.

Если задать численное значение жесткости k_1 одного упругого элемента, начальное количество связей N_0 и значение работы A_0 , после совершения которой возникает разрыв одной связи, то можно рассчитать, при каком количестве оставшихся полноценных связей деформация перестанет зависеть от приложенной силы, и определить аналитический вид зависимости силы от удлинения.

На рис. 2 приведена иллюстрация к расчету формы диаграммы растяжения. При полноценных $N + 1$ связях деформирование системы будет описываться прямой OA , при полноценных $N + 1$

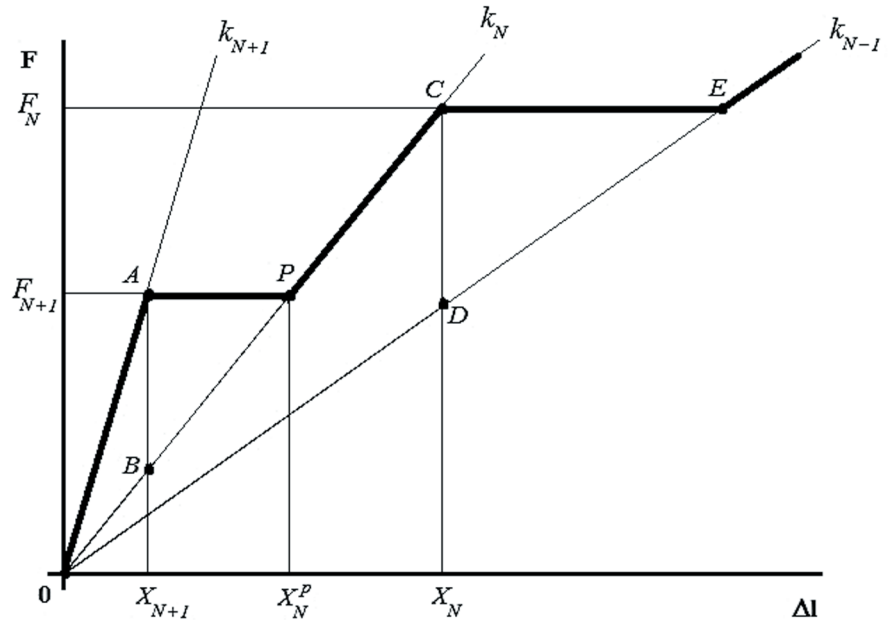


Рис. 2. Форма диаграммы растяжения

связях – прямой OC , а при полноценных $N - 1$ связях – прямой OE . Коэффициенты жесткости системы, соответственно, будут $k_{N+1} = (N + 1) \cdot k_1, k_N = N \cdot k_1, k_{N-1} = (N - 1) \cdot k_1$.

Если деформированная система будет находиться в состоянии A , описываемом деформацией X_{N+1} и силой упругости F_{N+1} , и произойдет случайный разрыв одной из связей, то оставшиеся N связей из состояния B с той же деформацией X_{N+1} растянутся до равновесного состояния P . Прирост потенциальной энергии этих N связей численно будет равен площади «трапеции равновесия» $X_{N+1} - B - P - X_N^P$. Если эта площадь меньше A_0 , то можно еще совершить работу по растяжению модели, переведя ее в состояние C , в котором разорвется еще одна случайная связь, а затем оставшиеся X_{N-1} связей из состояния D растянутся до равновесного состояния E , компенсировав силу F_N . Далее – по той же схеме, пока площадь «трапеции равновесия» не станет равна A_0 . В этом случае начнется лавинообразный разрыв связей, так как всякий раз система, не достигнув состояния равновесия, будет терять очередную связь.

Деформацию на каждом шаге в этом случае можно рассчитать из геометрических соображений по формуле

$$X_{i+1} = \sqrt{\frac{2A_0}{k_i} + X_i^2}, \quad (2)$$

а значение силы, соответственно, можно рассчитать по формуле

$$F_i = k_i \cdot X_i, \quad (3)$$

Если выразить пошагово деформацию через A_0, k_1 и N , то получится следующее:

$$X_{N_0}^2 = \frac{2A_0}{N \cdot k_1},$$

$$X_{N_0-1}^2 = \frac{2A_0}{(N_0 - 1) \cdot k_1} + \frac{2A_0}{N_0 \cdot k_1}, \dots, \quad (4)$$

$$X_{N_0-i}^2 = \frac{2A_0}{(N_0 - i) \cdot k_1} + \dots + \frac{2A_0}{N_0 \cdot k_1}.$$

Следовательно, деформацию модели на i -м шаге последовательности (4) можно представить в виде

$$X_{N_0-i} = \sqrt{\frac{2A_0}{k_1}} \cdot \sqrt{\sum_{j=0}^i \frac{1}{N_0 - j}}. \quad (5)$$

Силу упругости, возникающую в модели на i -м шаге, можно рассчитать по формуле

$$F_{N_0-i} = (N_0 - i) \cdot k_1 \cdot \sqrt{\frac{2A_0}{k_1}} \cdot \sqrt{\sum_{j=0}^i \frac{1}{N_0 - j}}. \quad (6)$$

Для постоянных $k_1 = 0,1, A_0 = 1, N_0 = 100$ график зависимости $F_N = f(X_N)$, рассчитанной по формулам (5) и (6), представлен на рис. 3.

В зависимости от начального количества полноценных связей при наступлении критического состояния количество оставшихся связей

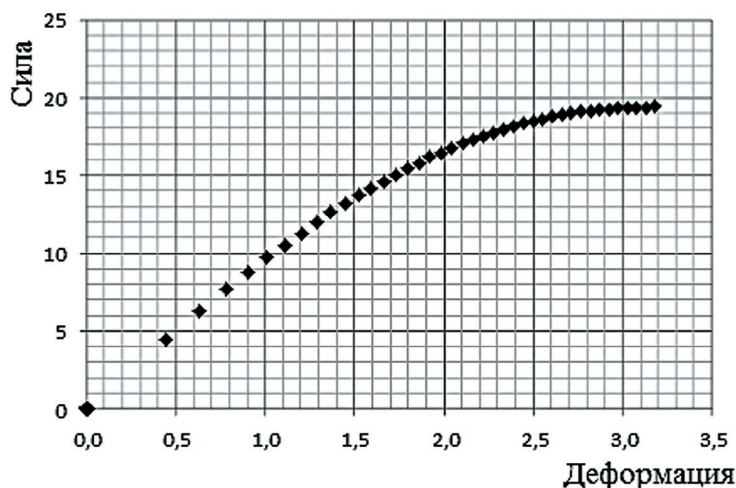


Рис. 3. Диаграмма растяжения модели
(в условных единицах силы и условных единицах длины)

Зависимость числа оставшихся связей от их начального количества

N_0	10	100	1000	3000	5000	10000	15000	20000
N	7	61	607	1820	3033	6066	9099	12131
%	70,00	61,00	60,70	60,67	60,66	60,66	60,66	60,65

уменьшается таким образом, что в процентном отношении наблюдается закономерность, представленная в таблице.

При увеличении начального количества связей их конечное число при критическом растяжении стремится к постоянной величине 60,65...% от исходного значения N_0 .

Если N_0 достаточно велико, то и в критическом состоянии их останется еще много, чтобы сделать следующие формулы (5) и (6), перейдя от дискретных значений величин к непрерывным:

$$\sum_{j=0}^i \frac{1}{N_0 - j} \approx \int_0^i \frac{dx}{N_0 - x} = -\ln \frac{N_0 - i}{N_0} = \ln \frac{N_0}{N_0 - i} \quad (7)$$

Тогда (5) выразится как

$$X^2 = \frac{2A_0}{k_1} \cdot \ln \frac{N_0}{N_0 - i}$$

или

$$N = N_0 - i = N_0 e^{-\frac{k_1 \cdot X^2}{2A_0}} \quad (8)$$

Используя (5) и (8), выражение (6) можно переписать в виде

$$F = N_0 e^{-\frac{k_1 \cdot X^2}{2A_0}} \cdot k_1 \cdot X \quad (9)$$

Область определения функции (9) лежит в интервале от 0 до $X_{кр}$, где $X_{кр}$ можно найти, решив уравнение

$$\left. \frac{dF}{dX} \right|_{X=X_{кр}} = 0 \quad (10)$$

Решение уравнения (10) дает значение $X_{кр} = \sqrt{\frac{A_0}{k_1}}$, а число полноценных оставшихся связей $N_{кр} = N_0 e^{-0,5}$, следовательно, отношение числа связей в критическом состоянии к начальному числу связей равно

$$\frac{N_{кр}}{N_0} = e^{-0,5} \approx 0,606530...$$

В выражении (9) разложение экспоненциального множителя в ряд Тейлора дает

$$F = k_1 \cdot N_0 \cdot X \times \left(1 - \frac{k_1 \cdot X^2}{2 \cdot A_0} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k_1 \cdot X^2}{2 \cdot A_0} \right)^2 + \dots \right) \quad (11)$$

что аналогично функции пластичности $\sigma = Ee(1 - \omega_e)$, где σ – напряжение, E – модуль продольной упругости, e – деформация, ω_e – безразмерная функция пластической деформации ($0 \leq \omega_e \leq 1$).

Используя (9), можно вычислить работу, совершаемую при деформировании модели:

$$A = \int_0^X k_1 \cdot N_0 \cdot X \cdot e^{-\frac{k_1 \cdot X^2}{2A_0}} dX = N_0 \cdot A_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{k_1 \cdot X^2}{2A_0}} \right) \quad (12)$$

Потенциальная энергия оставшихся полноценных связей равна

$$E_p = k_1 N_0 e^{-\frac{k_1 \cdot X^2}{2A_0}} \cdot \frac{X^2}{2} \quad (13)$$

Разность между (12) и (13) составит потери механической энергии при растяжении:

$$S = N_0 \cdot A_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{k_1 \cdot X^2}{2A_0}} \right) - k_1 \cdot N_0 \cdot e^{-\frac{k_1 \cdot X^2}{2A_0}} \cdot \frac{X^2}{2} \quad (14)$$

При достижении критического состояния $X_{кр} = \sqrt{\frac{A_0}{k_1}}$ потери энергии составят

$$S_{кр} = N_0 \cdot A_0 \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot e^{-0,5}}{2} \right),$$

что менее 9,1% от полной работы на интервале $[0; X_{кр}]$.

Дальнейшее развитие и уточнение модели позволит аналитически описывать площадь петли гистерезиса и оценивать минимальную механическую работу, которую необходимо совершить за один цикл нагружения, чтобы стало накапливаться повреждение металла. Следует попытаться применить модель к исследованию узлов различных механизмов при их циклическом нагружении, в том числе различных частей подвижного состава. ■

Литература

1. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. 2-е изд. М.: Машиностроение, 1975. 401 с.
2. Махутов Н.А. Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность. М.: Машиностроение, 1981. 272 с.
3. Илюшин А.А. Пластичность. Ч. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.